


APLICACION DEL METODO DE RITZ A FUNCIONALES RELAJADOS EN MECANICA

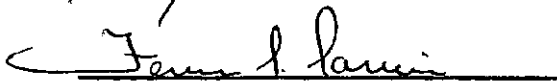
DE LOS SOLIDOS

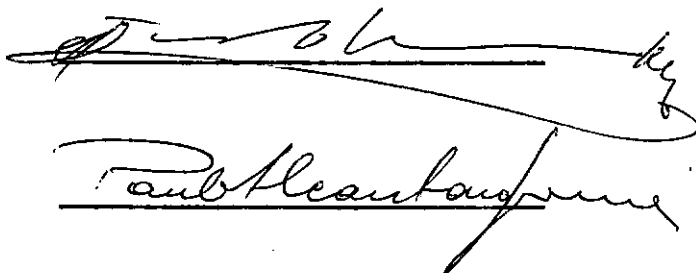
RAUL ANTONINO FEIJOO

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE -  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA-  
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO --  
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M. Sc.)

Aprovada por:

  
Presidente





RIO DE JANEIRO

ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

JUNHO DE 1973

a mi esposa  
a mis padres  
a mis hijos.

## AGRADECIMIENTOS

A la Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de la -  
Universidad Nacional de Córdoba, en la persona de los Profesores -  
Scardiglia, Alfredo Schegg y Carlos Prato, por haber hecho posible  
mi permanencia en COPPE (Coordenação dos Programas de Pós-Gradua--  
ção de Engenharia).-

A COPPE, en la persona del Profesor Fernando Luiz Lobo Carnei  
ro por el apoyo brindado.-

A los Profesores Fernando Luiz Lobo Carneiro, Pablo Gomes, Ve  
nancio Filho, Hans Weber, Sydney Santos por las enseñanzas impartid  
as y la amistad brindada.-

Al Profesor Leopoldo L. Moll por sus consejos, ayuda y estímul  
o durante mis estudios de pos-graduación en COPPE.-

Al Profesor Luiz Bevilacqua por la orientación, críticas y est  
ímulo durante la realización de este trabajo.-

Por último no quiero dejar de agradecer a las personas a quien  
es está dedicado este trabajo, por el sacrificio que realizaron -  
para que alcanzara una de las etapas propuestas en mi vida.-

## R E S U M E N

Se presenta en este trabajo la teoría correspondiente a la primera variación aplicada a diferentes tipos de funcionales a la vez que las condiciones de Weierstrass-Erdmann, para la existencia de extremales con puntos angulosos es deducida para cada uno de ellos.-

El Método de Ritz es analizado en la forma clásica pero en el análisis de la convergencia de la solución aproximada como del comportamiento de los coeficientes-Ritz se recurre a la teoría de operadores en espacios de Hilbert que permite presentar el problema de una manera elegante, concisa y clara.-

El concepto de "funcionales relajados" y un camino sistemático para su obtención, la aplicación del método de Ritz a los mismos, la necesidad de subdividir la región en que están aplicados dichos funcionales a la vez que el mapeamiento de esa región son analizados a lo largo de este trabajo.-

También se presentan resultados numéricos para el caso de torsión en barras y su comparación con los exactos y los obtenidos por otros métodos.-

R E S U M O

Apresenta-se neste trabalho a teoria correspondente à primeira variação aplicada a diversos tipos de funcionais e simultaneamente se deduz as condições de Weierstrass-Erdmann para a existência de funções extremais com pontos angulosos.

O método de Ritz é analisado na sua forma clássica porém na análise da convergência da solução aproximada e no comportamento dos coeficientes - Ritz se recorre à teoria dos operadores em espaços de Hilbert, o que permite apresentar o problema de uma maneira elegante, concisa e clara.

Analisa-se ao longo deste trabalho o conceito de "funcionais relaxados" e um caminho sistemático para sua obtenção, a aplicação do método de Ritz aos mesmos, bem como, a necessidade de subdividir e mapear a região à qual estão aplicados esses funcionais.

Também se apresenta os resultados numéricos para o caso de torção em barras e sua comparação com os valores exatos e os obtidos por outros métodos.

S U M M A R Y

The theory of the first variations of different type of functionals is presented in this work.

The Weierstrass - Erdmann corner conditions are obtained for each one of these functionals.

The classical theory of the Ritz Method is developed, but when dealing with convergencde of the aproximated solutions and performance of the Ritz coefficients, the theory of operators in Hilbert spaces is introduced; this makes it possible to have the problem in an elegant, clear and compact form.

The concept of "extended functionals", a systematic way of getting them, the application of the Ritz Method to these functionals as well as mapping and the subdivision of the application domain are analyzed in this investigation.

Numerical results for torsion in bars are compared with results obtained through some other methods and also the exact solution .

## I N D I C E

### INTRODUCCION

1

### CAPITULO I

#### CALCULO DE VARIACIONES

§1.1.	Funcionales	2
§1.2.	Espacio de funciones	4
§1.3.	Variación de un funcional	8
§1.4.	Espacio de funciones admisibles y espacio de variaciones admisibles	9
§1.5.	Extremo de un funcional	10
§1.6.	Máximos y mínimos relativos, fuertes y débiles	11
§1.7.	Condición necesaria para la existencia de un mínimo relativo	12
§1.8.	Ecuación de Euler-Lagrange	13
§1.9.	Condiciones naturales de contorno	16
§1.10.	Condiciones de Weierstrass-Erdman para extremales con "puntos" angulosos	18
§1.11.	Funcionales que dependen de más de una función	24
§1.12.	Funcionales que dependen de funciones con más de una variable independiente	29
§1.13.	Funcionales que dependen de derivadas de orden superior	33

## CAPITULO II

## METODO DE RITZ

§2.1.	Métodos directos	37
§2.2.	Secuencias minimizantes	38
§2.3.	Método de Ritz. Principios y aspectos teóricos	39
§2.4.	Método de Ritz. Aspectos prácticos	45
§2.5.	Condiciones de contorno	46
§2.6.	Estimación del error	47
§2.7.	Propiedades de los coeficientes-Ritz	49

## CAPITULO III

## FUNCIONALES RELAJADOS

§3.1.	Introducción	57
§3.2.	Problema de Dirichlet, problema de Newmann	61
§3.3.	Funcionales relajados para el problema de Dirichlet y Newmann. Relajamiento de las condiciones de Weierstrass-Erdmann	68
§3.4.	Relajamiento de funcionales en los que intervienen derivadas de orden superior	74

## CAPITULO IV

## MAPEAMIENTO

§4.1.	Consideraciones generales	83
§4.2.	Representación discreta de la región R	84



§4.3.	Mapeamiento de la subregión $R_r$	86
§4.4.	Evaluación de los coeficientes de la matriz-Ritz mediante integración numérica	89

## CAPITULO V

FUNCIONAL RELAJADO PARA EL CASO ESPECIFICO  
DE TORSION DE BARRAS. APLICACIONES NUMERI-  
CAS

§5.1.	Funcional relajado para el problema de torsión	92
§5.2.	Aplicación del método de Ritz	95
§5.3.	Aplicaciones numéricas	99

CONCLUSIONES	121
--------------	-----

ANEXO A. Funcionales que dependen de derivadas de orden superior	123
ANEXO B. Mínimo de un funcional cuadrático	126
ANEXO C. Propiedades de la mejor aproximación	143
ANEXO D. Notación variacional	146
ANEXO E. Limite inferior para el coeficiente de rigidez torsional	148
BIBLIOGRAFIA	150

## I N T R O D U C C I O N

Todo problema lineal de la física matemática se sabe está gobernado por ecuaciones diferenciales o también por los llamados "principios de mínimo". Así por ejemplo la posición de equilibrio de un sistema estructural es una configuración tal que hace mínima la energía potencial total del sistema.-

Matemáticamente el problema de resolver una ecuación diferencial para determinadas condiciones de contorno, es equivalente al problema en el cálculo de variaciones de hallar la función que minimiza una integral para la cual la ecuación diferencial dada no es otra cosa que la ecuación de Euler-Lagrange.-

Surgen así, entre otros, los llamados "métodos directos" para resolver los problemas que se plantean en el cálculo variacional (minimizar un determinado funcional); estos métodos dada la equivalencia mencionada anteriormente son simultáneamente métodos para resolver ecuaciones diferenciales.-

Dos físicos, Lord Rayleigh y Walter Ritz, conciben independiente mente uno de estos métodos (el primero en su obra clásica "Theory of Sound", el segundo en sus publicaciones de 1908 y 1909), la idea es sustituir el problema variacional por otro que consiste en minimizar una función y en el que sólo un número determinado de parametros es necesario calcular.-

La introducción del concepto de "funcionales relajados" y su obtención a travez del relajamiento de las condiciones de Weierstrass--

Erdmann, como así también del mapeamiento de la región en que están actuando estos funcionales, hacen que la aplicación del Método de Ritz permita abordar con generalidad, dentro de un mismo problema, cualquier forma y condición de contorno.-

Algunos autores como W. Kohn<sup>(27)</sup>, y E. H. Lee<sup>(28)</sup> han trabajado con estos tipos de funcionales, parece ser sin embargo, que dichos autores los obtenían mediante sucesivos tanteos ayudados por la intuición y experiencia. Existe como se muestra luego en este trabajo una manera lógica y sistemática para obtener dichos funcionales.-

Por otra parte la existencia de computadores digitales permite automatizar los cálculos mediante "programas" muy similares a los empleados en el análisis por Elementos Finitos.-

## C A P I T U L O I. CALCULO DE VARIACIONES

### §1.1.FUNCIONALES.

Ciertas cantidades llamadas "funcionales" tienen un papel importante en numerosos problemas de mecánica, física, etc.. Por "funcional" se interpretará el operador que relaciona cada elemento perteneciente a un determinado conjunto con números reales. Un ejemplo clásico es el caso de la partícula que se mueve libremente en el plano - pudiendo recorrer diferentes trayectorias par unir dos puntos A y B- con velocidad  $v$ , se obtiene un funcional asociando a cada trayectoria el tiempo que la partícula emplea en recorrer  $\widehat{AB}$ .-

Resumiendo se tiene que si  $S^{(1)\hat{\hat{}}}$  es un conjunto de cualquier tipo y si a cada elemento  $u \in S^{\hat{\hat{}}}$  corresponde un y solo un número  $F(u)$ , - se dirá que el funcional  $F$  está dado en  $S$ ; el conjunto  $S$  se denomina dominio de definición del funcional  $F$  y se lo designará con  $D(F)$ , la cantidad  $F(u)$  es llamada "valor del funcional  $F$  para el elemento  $u$ ". A su vez  $F$  se dice que es real si todos sus valores son reales. Simbólicamente se tiene:

$$F = F(u), u \in S, F(u) \in R^{\hat{\hat{\hat{}}}} \quad (1.1.1)$$

El problema en el cálculo de variaciones consiste en: dado un - funcional  $F$ , de dominio  $D(F)$ , se quiere determinar el elemento  $u_0$ , donde  $u_0 \in D(F)$ , tal que el funcional  $F$  tome un valor mínimo:

$\hat{\hat{}}$  Indica bibliografía al final del presente trabajo.

$\hat{\hat{\hat{}}}$   $u \in S$  debe leerse  $u$  pertenece a  $S$ .

$\hat{\hat{\hat{\hat{}}}}$   $R$  indica el conjunto de números reales.

$$f(u_0) = \inf_{u \in D(F)} F(u) \quad (1.1.2)$$

o un valor máximo:

$$F(u_0) = \sup_{u \in D(F)} F(u) \quad (1.1.3)$$

Téngase presente que el problema de determinar el máximo de  $F$ , es idéntico al de determinar el mínimo de  $(-F)$ .-

## §1.2. ESPACIO DE FUNCIONES

En el estudio de funciones de  $n$  variables es conveniente interpretar al conjunto de " $n$ " números  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  como las coordenadas de un punto en el espacio Euclidiano  $n$  dimensional ( $E_n$ ). De la misma manera cuando se trabaja con funcionales se puede generalizar la idea anterior y considerar cada función  $u$ , perteneciente a determinada clase, como un "punto" de un cierto espacio, espacio este cuyos elementos son por tanto funciones y que se convendrá en llamar "espacio de funciones".-

Por otra parte, cuando se tiene funciones de  $n$  variables independientes es suficiente considerar un espacio  $E_n$ , cuando se trabaja con funcionales esto no ocurre y la naturaleza del problema determinará, en general, la elección del espacio de funciones. Por ejemplo sea el funcional:

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx \quad (1.2.1)^{\hat{}}$$

---

$\hat{}$   $u'(x)$  indica  $du/dx$ .-

será natural considerar el  $D(F)$  como el conjunto de todas las funciones con derivadas primeras continuas, es decir:

$$u \in D(F), D(F) = \{u; u \in C^1(a,b)\}$$

si  $F$  es de la forma:

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x), u''(x)) dx \quad (1.2.2)$$

se tomaría  $D(F) = \{u; u \in C^2(a,b)\}$  .-

El concepto de continuidad tiene importancia fundamental en el estudio de funcionales, de la misma manera que lo tiene para funciones, y así como en  $E_n$  se introduce el concepto de distancia de un punto al origen del sistema, en el espacio de funciones se definirá de manera análoga el concepto de "norma" de una función; para generalizar este concepto se introducirá lo que se llamará "espacio lineal normado" (en forma abreviada se escribirá e.l.n.).-

DEFINICION 1.2.1. : El conjunto  $S$  de elementos  $x, y, z$ , etc. de cualquier tipo, es llamado espacio lineal sobre el campo  $\mathcal{F}$  con elementos  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  si las siguientes condiciones se cumplen:

- i ) Si  $x \in S, y \in S$  luego la suma de  $x$  e  $y$ ,  $(x + y)$ , esta definida tam-  
bién en  $S$  es decir  $(x + y) \in S$ .-
- ii ) La adición es conmutativa:  $x + y = y + x$ .-
- iii) La adición es asociativa  $(x + y) + z = x + (y + z)$ .-
- iv ) Existe un elemento nulo  $0 \in S$  tal que  $x + 0 = x$  para cualquier  $x$   
perteneciente a  $S$ .-
- v ) Para todo  $x \in S$  existe un elemento  $(-x) \in S$  tal que  $x + (-x) = 0$ .-
- vi ) La multiplicación escalar de elementos de  $S$  por elementos de  $\mathcal{F}$   
está definida, esto es si  $x \in S$  y  $\alpha \in \mathcal{F}$  luego  $\alpha x \in S$ .-

vii ) La multiplicación escalar es asociativa: si  $x \in S$  y  $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ ,

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta) x.-$$

viii) La multiplicación escalar es distributiva: si  $x \in S$  y  $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ ,

$$\text{luego } (\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x; \text{ si } x, y \in S \text{ y } \alpha \in \mathcal{F} \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.-$$

ix ) Existe el elemento identidad  $1 \in \mathcal{F}$ , tal que  $1x = x.-$

DEFINICION 1.2.2.: Sea  $S$  un espacio lineal sobre el campo de números reales  $R$ . El funcional  $\|x\|$  que está definido en  $S$  es llamado "norma" de  $x \in S$  si cumple con las siguientes propiedades:

i )  $\|x\| > 0$  para todo  $x \in S$ , con la excepción del elemento nulo.-

ii )  $\|x\| = 0$  si y solo si  $x = 0$  (elemento nulo).-

iii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ , para todo  $x \in S, \lambda \in R.-$

iv )  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (desigualdad del triángulo).-

Nótese que la norma, de acuerdo con estas propiedades, no es otra cosa que un funcional ya que a cada elemento  $x \in S$  le asigna un número real.-

DEFINICION 1.2.3.:  $S$  es un espacio lineal normado (  $S$  es un e.l.n.) sobre  $R$  si:

i )  $S$  es un espacio lineal sobre  $R.-$

ii) La norma definida en  $S$  satisface las propiedades establecidas en la DEFINICION 1.2.2. para todo  $x \in S.-$

Los elementos de un e.l.n. pueden ser objetos de cualquier tipo (números, vectores, funciones, etc.). Los siguientes ejemplos son importantes para el desarrollo de este trabajo.-

Ejemplo 1. Sea  $C[a,b]$  el conjunto de todas las funciones continuas,  $y = y(x)$ , definidas en el intervalo cerrado  $[a,b]$ ; la adición de ele

mentos de  $C$  o la multiplicación de ellos por números reales conducirá a otro elemento de  $C$ , y la norma se podrá definir como:

$$\|y\| = \max_{[a,b]} y(x)$$

(La demostración de que esta norma satisface las propiedades establecidas en la DEFINICION 1.2.2. puede verse en Sagan H., "Introduction to the Calculus of Variations").-

Ejemplo 2. El espacio  $C^1[a,b]$  de todas las funciones continuas con derivadas primeras continuas en todo  $[a,b]$ , puede tener como "norma" a:

$$\|y\| = \max_{[a,b]} |y(x)| + \max_{[a,b]} |y'(x)|$$

Se tiene así los conceptos de espacio lineal (como una generalización del espacio de números reales), de norma (como generalización de la distancia de un punto al origen del sistema de referencia). Se está en condiciones de hablar de "distancia" entre elementos y por tanto de "proximidad entre los mismos". Por definición la distancia entre dos elementos  $x, y \in S$  será la cantidad  $\|x - y\|$ , es decir la norma del elemento  $z \in S$  definido por  $z = x - y$ .

Las siguientes definiciones serán útiles<sup>(3)</sup>.-

DEFINICION 1.2.4.: Sea  $Y \subset S$ .  $Y$  es llamado un "subconjunto abierto" del e.l.n.  $S$  si para cualquier  $f \in Y$  existe un  $\delta > 0$  ( $\delta \in \mathbb{R}$ ) tal que  $f+h \in Y$  para todo  $h \in S$  definido por  $\|h\| < \delta$ .

DEFINICION 1.2.5.: La "proximidad" o "vecindad" de orden  $\delta$  a  $f_0 \in S$ , que se indicará por  $N^\delta(f_0)$ , es el subconjunto abierto en  $S$  definido por todos los elementos  $f \in S$  tal que  $\|f - f_0\| < \delta$ , o de otra manera, cons



tituido por todos los elementos  $f_0 + h$ ,  $h \in S$  tal que  $\|h\| < \delta$ .-

### §1.3. VARIACION DE UN FUNCIONAL

Se introduce aquí el concepto de "variación" de un funcional, análogo al concepto de diferencial de una función. Este concepto se utilizará para establecer condiciones para la existencia de extremos (máximos o mínimos relativos) de un funcional.-

Supóngase  $F(y)$  definido en  $Y \subset S$ , donde  $S$  es un e.l.n.. Si  $y_0 \in Y$  y  $h \in S$   $y_0 + h \in Y$  si  $\|h\| < \delta$  ( $\delta > 0$ ), luego  $F(y_0 + h)$  también está definido en  $Y$ . Nótese que dado  $\delta > 0$  y  $h \in S$ ,  $\|h\| < \delta$  siempre será posible dado un  $h$  determinar  $t$ ,  $t \in R$ , tal que  $\|th\| < \delta$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ), por lo que  $F(y_0 + th)$  también estará definido en  $Y$ .-

Luego  $\delta F(h)^{\hat{}}$  es llamado "primera variación" de  $F(y)$  en  $y = y_0$ , si para  $t \in R$ :

$$\delta F(h) = \left. \frac{d}{dt} F(y_0 + th) \right|_{t=0} \quad (1.3.1)$$

existe para todo  $h \in S$ ,  $\|h\| < \delta$ .-

La primera variación  $\delta F(h)$  de  $F(y)$  en  $y = y_0$  es homogénea de primer grado, esto es para todo elemento  $h \in S$  y todo  $\lambda \in R$  se verifica que:

$$\delta F(\lambda h) = \lambda \delta F(h) \quad (1.3.2)$$

La demostración de (1.3.2) es como sigue:

---

<sup>^</sup> Estrictamente la primera variación  $\delta F(h)$  es un funcional que depende no solo de  $h$  sino también de  $y = y(x)$ , luego sería  $\delta F(y, h)$ .-

$$\begin{aligned}
\delta F(\lambda h) &= \left. \frac{d}{dt} F(y_0 + t\lambda h) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(y_0 + t\lambda h) - F(y_0)}{t} = \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \lambda \frac{F(y_0 + t\lambda h) - F(y_0)}{t\lambda} = \lim_{\lambda h \rightarrow 0} \lambda \frac{F(y_0 + \lambda h) - F(y_0)}{\lambda h} = \\
&= \lambda \delta F(h)
\end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar.-

Por otra parte se tiene que:

$$\delta F(h) = \left. \frac{d}{dt} F(y_0 + th) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(y_0 + th) - F(y_0)}{t} \quad (1.3.3)$$

de donde:

$$\delta F(h) + \alpha(th) = \frac{F(y_0 + th) - F(y_0)}{t} \quad (1.3.4)$$

en la que se verifica:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(th) &= 0 \\
t &\rightarrow 0
\end{aligned}$$

Si se multiplica ambos miembros de (1.3.4) por  $t$  se tiene

$$F(y_0 + th) - F(y_0) = \delta F(th) + t\alpha(th) \quad (1.3.5)$$

y llamando  $th=k$  se tiene

$$F(y_0 + k) - F(y_0) = \delta F(k) + \varepsilon(k). \quad (1.3.6)$$

$$\text{donde } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(k)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \alpha(th) = 0$$

#### §1.4. ESPACIO DE FUNCIONES ADMISIBLES Y ESPACIO DE VARIACIONES ADMISIBLES

Considérese<sup>(3)</sup> el problema variacional mas simple:

Encontrar la función  $y=y(x) \in C^1[a,b]$  tal que minimice al funcional :

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

y tal que  $y(a)=y_a$  ,  $y(b)=y_b$  (condiciones de contorno).-

Resulta evidente que solo interesan, de todas las funciones  $y \in C^1[a,b]$  , aquellas que satisfacen las condiciones de contorno; el conjunto de estas funciones se llamará "espacio de funciones competitivas" o "espacio de funciones admisibles" y se lo designará por  $\Sigma$ . En el ejemplo planteado se tiene:

$$\Sigma = \left\{ y; y \in C^1[a,b], y(a)=y_a, y(b)=y_b \right\}$$

Teniéndose definido el campo de funciones admisibles, se introducirá el concepto de "campo de variaciones admisibles".-

Se tiene así que: "Para un cierto espacio de funciones admisibles  $\Sigma \subset S$ ,  $H \subset S$  es llamado campo de variaciones admisibles de  $\Sigma$  si, para todo  $y \in \Sigma$ ,  $h \in H$ ,  $y+h \in \Sigma$ .-

### §1.5. EXTREMO DE UN FUNCIONAL

Sea  $\Sigma \subset S$  el espacio de funciones admisibles para un cierto funcional  $F(y)$ . Se dice que  $y_0 \in \Sigma$  conduce a un mínimo relativo (o máximo relativo) a  $F(y)$  en  $\Sigma$  si:

$$F(y) - F(y_0) \geq 0 \quad (\leq 0) \quad (1.5.1)$$

para todo  $y \in \Sigma$  para los cuales  $\|y - y_0\| < \delta$ , para algún  $\delta > 0$ .-

Teniéndose en cuenta la definición de espacio de variaciones admisibles se tendrá:

$$F(y_0+h) - F(y_0) \geq 0 \quad (\leq 0) \quad (1.5.2)$$

para todo  $h \in H$ , donde  $H$  es el espacio de variaciones admisibles de  $\Sigma$ , tal que  $\|h\| < \delta$ ,  $\delta > 0$ .-

## §1.6. MAXIMOS Y MINIMOS RELATIVOS, FUERTES Y DEBILES

Como se ha visto el funcional  $F(y)$  está definido en un subconjunto abierto  $Y$  de un cierto e.l.n.  $S$ ; dependiendo del tipo de norma adoptada resulta evidente surgen diferentes tipos de mínimos y máximos relativos.-

Así por ejemplo, supóngase  $S$  idéntico a  $C^1[a,b]$ . En él se puede definir como norma a :

$$\|y\| = \max_{x \in [a,b]} |y(x)| \quad (1.6.1)$$

La norma definida en (1.6.1) se designará como "norma débil", y al e.l.n.  $C^1[a,b]$ , con norma como la (1.6.1) e.l.n. débil y se lo designará por  $\bar{C}^1[a,b]$ .-

Si en lugar de (1.6.1) se definiera:

$$\|y\| = \max_{x \in [a,b]} |y(x)| + \max_{x \in [a,b]} |y'(x)| \quad (1.6.2)$$

se hablará de "norma fuerte" y de e.l.n. fuerte  $\underline{C}^1[a,b]$ .-

Se vio que una vez establecida la norma se definía el concepto de "vecindad" (Definición 1.2.5). Se tendrá por tanto vecindad débil y fuerte, surge así la siguiente definición<sup>(3)</sup>:

La vecindad de orden  $\delta$ ,  $N_d^\delta(y_0)$  ( o  $N_f^\delta(y_0)$  ) de  $y=y_0(x) \in \bar{C}^1[a,b]$  ( o  $\underline{C}^1[a,b]$  ) es el conjunto de elementos definidos por  $\{y; |y-y_0| < \delta\}$  ( o  $\{y; |y-y_0| < \delta, |y' - y'_0| < \delta\}$  ) y es la mada vecindad débil (fuerte)

de orden  $\delta$  de  $y = y_0(x)$ .-

Surge así también el concepto de mínimo relativo fuerte o débil del funcional  $F(y)$ . Se tendrá:

La función  $y_0 \in \Sigma$  conduce a un mínimo relativo fuerte ( o débil ) para  $F(y)$  en  $\Sigma$  si

$$F(y) - F(y_0) \geq 0$$

para toda  $y \in \Sigma$  definidas por  $y \in N_d^\delta(y_0)$  ( o  $y \in N_f^\delta(y_0)$  ) para algún  $\delta > 0$ .

### §1.7. CONDICION NECESARIA PARA LA EXISTENCIA DE UN MINIMO RELATIVO

Sea  $F(y)$  un funcional definido en el e.l.n.  $S$ ,  $\Sigma$  el espacio de funciones admisibles y supóngase  $\Sigma$  admite un  $H$ , espacio lineal de variaciones admisibles. Luego dado un  $h \in H$  definido por  $\|h\| < \delta$  para algún  $\delta > 0$  se tendrá que si  $|t| \leq 1$  el elemento  $th \in H$ , ya que  $\|th\| < \delta$ . Bajo estas hipótesis se vio es válido colocar la expresión de la variación total de un funcional bajo la forma de (1.3.6):

$$F(y_0 + h) - F(y_0) = \delta F(h) + \varepsilon(h) \geq 0$$

donde  $y_0 \in \Sigma$  se supone conduce a un mínimo de  $F(y)$  en  $S$ ; según lo expresado anteriormente si  $|t| \leq 1$  se tendrá:

$$F(y_0 + th) - F(y_0) = \delta F(th) + \varepsilon(th) \geq 0 \quad (1.7.1)$$

de (1.7.1) se tiene:

$$\delta F(th) + \varepsilon(th) \geq 0 \quad (1.7.2)$$

Ahora bien, si  $0 \leq t \leq 1$  resulta de (1.7.2)

$$\delta F(h) + \frac{\varepsilon(th)}{t} \geq 0 \quad (1.7.3)$$

si  $-1 \leq t \leq 0$  se tiene

$$\delta F(h) + \frac{\varepsilon(th)}{t} \leq 0 \quad (1.7.4)$$

y recordando que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(th)}{t} = 0$  resulta de (1.7.3) y (1.7.4)

$$\delta F(h) = 0 \quad (1.7.5)$$

y dado que  $h$  es un elemento cualquiera de  $H$ , la (1.7.5) es válida para todo  $h \in H$ .

Surge así la siguiente proposición:

Si el funcional  $F(y)$ , admite la existencia de la primera variación en  $y_0 \in \Sigma \subset S$ , donde  $\Sigma$  admite un espacio lineal de variaciones admisibles  $H$  asume un mínimo relativo (o máximo) en  $\Sigma$  en  $y=y_0$  es necesario que:

$$\delta F(h) = 0$$

para todo  $h \in H$ .

## §1.8. ECUACION DE EULER LAGRANGE

Considérese el problema variacional mas simple: determinar la función  $y_0 \in \Sigma = \{y; y \in C^1[a,b], y(a)=y_a, y(b)=y_b\}$ , para el cual el funcional

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx \quad (1.8.1)$$

tenga un extremo débil.

Se supone que  $\Sigma$  admite un espacio lineal de variaciones admisibles  $H$ , definido por todo  $h$  tal que  $\|h\| < \delta$ ,  $\delta > 0$  y donde  $\|h\| = \max_{x \in [a,b]} |h(x)| + \max_{x \in [a,b]} |h'(x)|$  .-

Nótese que  $h(a) = h(b) = 0$ .

La variación total del funcional será:

$$\Delta F(y) = F(y+h) - F(y) = \int_a^b f(x, y+h, y'+h') dx - \int_a^b f(x, y, y') dx$$

Aplicando el desarrollo de Taylor a la anterior

$$\Delta F(y) = \int_a^b [f_y(x, y, y') h + f_{y'}(x, y, y') h'] dx + \dots \quad (1.8.2)$$

donde  $f_y$ ,  $f_{y'}$  indican derivada parcial respecto a los correspondientes argumentos y si los términos de orden superior al primero no se tienen en cuenta resultará:

$$\Delta F(y) = \int_a^b [f_y h + f_{y'} h'] dx$$

Si  $|t| \ll 1$ ,  $\|th\| \ll \delta$ , por lo que la anterior es también válida para  $th$ , luego

$$\Delta F(y) = F(y+th) - F(y) = \int_a^b [f_y th + f_{y'} th'] dx$$

de donde

$$\frac{F(y+th) - F(y)}{t} = \int_a^b [f_y h + f_{y'} h'] dx$$

y recordando que por definición era:

$$\delta F(h) = \left. \frac{d}{dt} F(y+th) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(y+th) - F(y)}{t}$$

resulta

$$\delta F(h) = \int_a^b [f_y h + f_{y'} h'] dx \quad (1.8.3)$$

El segundo término del segundo miembro de (1.8.3) puede integrarse por partes (nótese que esto implica que  $f \in C^2[a, b]$ , con respecto a

todos sus argumentos):

$$\begin{aligned} \delta F(h) = \int_a^b \left[ f_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y') \right] h \, dx + \\ + f_{y'}(x, y, y') h \Big|_a^b \end{aligned} \quad (1.8.4)$$

y dado que  $h(a)=h(b)=0$  resulta:

$$\delta F(h) = \int_a^b \left[ f_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y') \right] h \, dx \quad (1.8.5)$$

Si en  $y \in \Sigma$  existe un mínimo ( o máximo ) relativo se vio en §1.7 que  $\delta F(h) = 0$  luego:

$$\delta F(h) = \int_a^b \left[ f_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y') \right] h \, dx = 0 \quad (1.8.6)$$

para todo  $h \in H$ .-

Por el "lema fundamental del cálculo de variaciones", cuya demostración puede verse en Sagan, H., "Introduction to Calculus of Variations", pag. 54, Gelfan-Fomin, "Calculus of Variations", pag. 9, resultará:

$$f_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y') = 0 \quad (1.8.7)$$

Esta ecuación recibe el nombre de ecuación de Euler-Lagrange.-

Nótese que la derivación de la ecuación de Euler-Lagrange supone como ya se dijo la existencia de  $\frac{d}{dx} f_{y'}$ , sin embargo argumentos mas elaborados muestran que

$$F(h) = \int_a^b (f_y h + f_{y'} h') \, dx = 0$$

implica (1.8.7). De hecho estos argumentos prueban la existencia de



esta derivada, esto es, sólo deberá exigirse que  $f \in C^1[a, b]$  ya que si  $y_0$  es solución  $\frac{d}{dx} f_{y'}(x, y_0, y'_0)$  existe (véase Anexo A).-

Resumiendo se tiene:

Para que  $y_0 \in \Sigma = \{y; y \in C^1[a, b], y(a)=y_a, y(b)=y_b\}$  conduzca a un mínimo (o máximo) relativo débil al funcional  $F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$  es necesario que  $y_0$  satisfaga la ecuación diferencial, ecuación de Euler Lagrange,

$$f_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y') = 0$$

para todo  $x \in [a, b]$  .-

La función  $y=y_0(x)$  suele llamarse "función extremante" o "extremal".-

### §1.9. CONDICIONES NATURALES DE CONTORNO

Cuando el espacio de funciones admisibles  $\Sigma$ , definido en §1.8, es tal que el valor de la función  $y=y(x)$  no está prescripto en uno o ambos extremos ( $\Sigma = \{y; y \in C^1[a, b]\}$ ), se tendrá que las variaciones admisibles  $h$  no necesariamente serán nulas en  $x=a$  y  $x=b$ , luego:

$$h \in \bar{H} = \{h; h \in C^1[a, b]\}$$

Sin embargo (1.8.3) debe ser nula para cualquier  $h \in H$  según se demostró en §1.7, supuesto  $y=y(x)$  minimice el funcional  $F(y)$ . Por tanto será nula en particular para todo  $h \in H = \{h; h \in C^1[a, b], h(a)=h(b)=0\}$  Para tales  $h$  el segundo término del segundo miembro de (1.8.4) será nulo y esto conduce a la ecuación de Euler-Lagrange (1.8.5). Pero si  $y=y(x)$  satisficé la ecuación de Euler-Lagrange para  $h \in \bar{H}$ , también la

satisface para  $h \in \bar{H}$ , luego la ecuación de Euler-Lagrange deberá cumplirse para todo  $h \in \bar{H}$ . De aquí se deduce que si  $h$  no es nulo en los extremos se deberá verificar que:

$$f_{y'}(x, y, y') h \Big|_{x=b} - f_{y'}(x, y, y') h \Big|_{x=a} = 0 \quad (1.9.1)$$

En particular si  $h(a)=0$  y  $h(b) \neq 0$  resulta:

$$f_{y'}(x, y, y') \Big|_{x=b} = 0 \quad (1.9.2)$$

y si  $h(b) = 0$  y  $h(a) \neq 0$

$$f_{y'}(x, y, y') \Big|_{x=a} = 0 \quad (1.9.3)$$

Por las mismas razones expuestas anteriormente para la ecuación de Euler-Lagrange la (1.9.2) y (1.9.3) es válida para todo  $h \in \bar{H}$ . Debe notarse, sin embargo, que si  $y = y(x)$  está prescripta en algunos de los extremos solamente una de las ecuaciones anteriores deberá tenerse en cuenta.-

Resumiendo se tiene que se  $h \in \bar{H}$ , los coeficientes de  $h$  deberán ser nulos para todo  $h$ , obteniéndose por un lado la ecuación de Euler-Lagrange y por otro lo que en la literatura se conoce como "condiciones naturales de contorno". Este nombre proviene del hecho de que estas condiciones surgen "naturalmente" en aquellos problemas en que la función  $y=y(x)$  no está prescripta en el contorno<sup>†</sup>. En otras palabras

---

<sup>†</sup> Se entiende por contorno a los puntos curvas o superficies que limitan el dominio de definición de la o las variables independientes.-

si en el problema variacional el  $D(F)$  está constituido por un conjunto de funciones que no deben satisfacer ninguna restricción en el contorno, la o las funciones que minimizan  $F$  satisfacen las condiciones naturales de contorno, que para el funcional  $F(x,y,y')$  están dadas en (1.9.2) y (1.9.3).-

#### §1.10. CONDICIONES DE WEIERSTRASS-ERDMANN PARA EXTREMALES CON "PUNTOS" ANGULOSOS.

Hasta ahora sólo se ha considerado como funciones admisibles las continuas en todo el dominio de definición de la o las variables independientes, por tanto el problema variacional sólo tendrá soluciones pertenecientes a esta clase de funciones. Sin embargo es fácil, dar ejemplos<sup>(5,6)</sup> de problemas que no tienen solución dentro de esta clase de funciones admisibles, pero que sí tienen solución si se extiende el campo de funciones admisibles de manera de incluir aquellas funciones que sean seccionalmente continuas<sup>†</sup>.-

---

<sup>†</sup> Una función se dice seccionalmente continua en  $[a,b]$ , por ejemplo, si ella tiene a lo sumo un número finito de discontinuidades en  $[a,b]$ , si  $x_0$  es un punto de discontinuidad luego  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x^-)$  como así también  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x^+)$  existe.-

El caso de derivadas seccionalmente continuas es similar.-

Si la discontinuidad es en  $x = a$  o  $x = b$  sólo deberá existir  $f(a^+)$ , y  $f(b^-)$  respectivamente.-

Se plantea así el siguiente problema variacional que es una generalización de lo ya visto anteriormente.-

De todas las funciones  $y=y(x)$  que son continuamente diferenciables en  $a \leq x \leq b$  excepto posiblemente en un número finito de puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , que satisfacen las condiciones de contorno  $y(a) = y_a$ ,  $y(b) = y_b$ , determinar la función para el cual el funcional

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (1.10.1)$$

alcance un mínimo (o máximo) relativo débil.-

De acuerdo con este enunciado es fácil ver que el espacio de funciones admisibles es:

$$y \in \Sigma = \left\{ y; y \in C^1[a, b], y(a)=y_a, y(b)=y_b \right\} \quad (1.10.2)$$

si  $y=y(x)$  es continua en todo  $[a, b]$ , o bien:

$$y \in \Sigma_s = \left\{ y; y \in C_s^1[a, b], y(a)=y_a, y(b)=y_b \right\} \quad (1.10.3)^{\hat{}}$$

si  $y=y(x)$  es seccionalmente continua.-

Si se considera el problema en  $\Sigma$ , el espacio de variaciones admisibles estará dado por

$$H = \left\{ h; h \in C^1[a, b], h(a)=0, h(b)=0 \right\} \quad (1.10.4)$$

donde

$$\|h\| = \max_{[a, b]} |h(x)| + \max_{[a, b]} |h'(x)|$$

---

<sup>^</sup> Véase nota al pie de la página siguiente.-

Si se considera en  $\sum_S$  y si la solución  $y = y_0(x) \in \sum_S$  es discontinua en el conjunto finito de puntos  $P = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , el espacio de variaciones admisibles será:

$$H_S = \left\{ h; h \in C_{SP}^1[a, b], h(a)=0, h(b)=0 \right\} \quad (1.10.5)^{\hat{}}^{\hat{}}$$

donde

$$\|h\| = \max_{[a, b]} |h(x)| + \sup_{[a, b]} |h'(x)| \quad (1.10.6)^{\hat{}}^{\hat{}}$$

Ahora bien, si se supone que  $f \in C^1(\mathcal{R})$  donde  $\mathcal{R}$  es el dominio en el espacio  $(x, y, y')$  que contiene todos los elementos lineales<sup>^</sup><sup>^</sup> de  $y = y_0(x)$ ,  $x \in [a, b]$  incluido  $(x_k, y_0(x_k), y_0'(x_k^{\pm}))$  en todos los  $x_k$  pa

<sup>^</sup> Con  $C_S^1[a, b]$  y  $C_{SP}^1[a, b]$  se indica el primero el espacio de todas las funciones seccionalmente continuas (esto es funciones continuas con derivadas seccionalmente continuas), el segundo el espacio de funciones continuas con derivadas discontinuas en  $P = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  conjunto finito de puntos dados.-

<sup>^</sup><sup>^</sup> Con  $\sup h'(x)$  se está indicando supremo<sup>(4)</sup> de  $h'(x)$  en el intervalo cerrado  $[a, b]$ .-

<sup>^</sup><sup>^</sup><sup>^</sup> Supóngase  $y \in C^1[a, b]$ , al conjunto de tres números.

$$(x_0, y(x_0), y'(x_0)), x_0 \in [a, b]$$

se llamará elemento lineal de  $y = y(x)$ .-

Se entiende aquí que  $y'(a) = y'(a^+)$  y que  $y'(b) = y'(b^-)$ .-

ra los cuales  $y'_0(x_k)$  es discontinua, se tiene entonces que la condición necesaria de mínimo relativo débil (o máximo) según lo planteado en §1.8 es:

$$\delta F(h) = \int_a^b \left[ f_{y'}(x, y, y') h + f_{y''}(x, y, y') h' \right] dx = 0 \quad (1.10.7)$$

para todo  $h \in H$  o todo  $h \in H_S$  según se esté en  $\Sigma$  o  $\Sigma_S$  respectivamente.-

Si se define<sup>(3)</sup>

$$\int_a^x f_{y'}(t, y_0(t), y'_0(t)) dt = \Phi(x) \quad (1.10.8)$$

notese que:

$$\Phi(x) \in C^1_{SP}[a, b] \quad \text{si } y_0 \in C^1_{SP}[a, b] \quad (1.10.9)$$

e integrando por parte el primer término del segundo miembro de la expresión (1.10.7)

$$\int_a^b f_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) h(x) dx = h(x) \Phi(x) \Big|_a^b - \int_a^b \Phi(x) h'(x) dx$$

y como  $h \in H_S$ , nótese que es suficiente trabajar con  $H_S$  ya que  $H \subset H_S$ ,

$$\int_a^b f_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) h(x) dx = - \int_a^b \Phi(x) h'(x) dx \quad (1.10.10)$$

reemplazando (1.10.10) en (1.10.7)

$$\int_a^b h'(x) \left[ f_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) - \Phi(x) \right] dx = 0 \quad (1.10.11)$$

y por el conocido lema de Dubois-Reymond

$$f_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) - \Phi(x) = C \quad (1.10.12)$$

para todo  $x \in [a, b]$  excepto en  $x \in P = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  y donde  $C$  es alguna constante.-

De (1.10.12) y (1.10.8) se sigue que:

$$f_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) = \int_a^x f_y(t, y_0(t), y'_0(t)) dt + C \quad (1.10.13)$$

Resumiendo se puede decir:

Para que  $y_0 \in C_{SP}^1[a, b]$  conduzca a un mínimo relativo (o máximo) al funcional  $F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$  en  $\sum_S = \{y; y \in C_S^1[a, b], y(a) = y_a, y(b) = y_b\}$ , donde se supone además que  $f \in C^1(\mathcal{A})$  en la que  $\mathcal{A}$  representa el dominio en el espacio  $(x, y, y')$  que contiene todos los elementos lineales de  $y_0$ , es necesario que exista una constante  $C$  tal que la ecuación integro-diferencial:

$$f_{y'}(x, y(x), y'(x)) = \int_a^x f_y(t, y(t), y'(t)) dt + C \quad (1.10.14)$$

sea satisfecha para  $y = y_0(x)$ , en todo  $x \in [a, b]$  excepto para aquellos puntos donde  $y'_0$  sea discontinua ( $x \in P = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ).-

La ecuación (1.10.14) es llamada Ecuación de Euler-Lagrange en forma integral.-

De (1.10.14) se deduce también que si  $y = y_0(x)$  es como se definió anteriormente es necesario que en todo intervalo donde  $y'_0$  sea continua (es decir  $y_0 \in C^1(x_k, x_{k+1})$  para  $k=1, 2, \dots, n$ , donde  $x_1 = a$  y  $x_{n+1} = b$ ) se debe satisfacer la ecuación diferencial (ecuación de Euler-Lagrange en forma diferencial (1.8.7) ):

$$f_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad (1.10.15)$$

para demostrar esto solo es necesario recordar que

$$\bar{\Phi}(x) = \int_a^x f_y(t, y_0(t), y'_0(t)) dt \in C^1(x_k, x_{k+1})$$

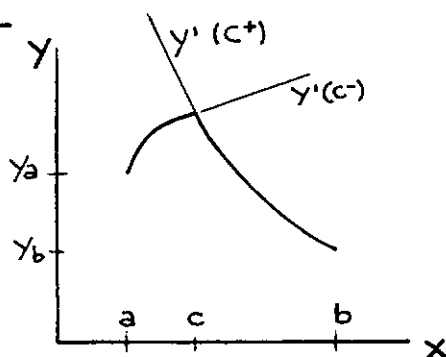
Sea nuevamente el problema planteado anteriormente es decir:

Supóngase que  $y_0 = y_0(x)$  minimiza al funcional

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$$

y satisface las condiciones de contorno  $y(a)=y_a$ ,  $y(b)=y_b$ . Se supone además que  $y_0 \in C_{SP}^1[a, b]$  donde  $P = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  conjunto finito de puntos en que  $y'_0$  es discontinua, en la Figura 1.1  $P = \{c\}$ ; nótese que  $y_0$  es continua en todo  $[a, b]$ .-

Figura 1.1



Se vio que  $y=y_0(x)$  satisface la ecuación de Euler-Lagrange en su forma integral en todo  $x \in [a, b]$  excepto en  $x \in P$ , luego:

$$f_{y'}(x, y_0, y'_0) = \int_a^x f_y(t, y_0(t), y'_0(t)) dt + C$$

desde que el segundo miembro es continuo en todo  $[a, b]$

$$f_{y'}(c^-, y_0(c^-), y'_0(c^-)) = f_{y'}(c^+, y_0(c^+), y'_0(c^+)) \quad (1.10.16)$$

debe cumplirse en tales puntos de discontinuidad.-

Por otra parte desde que:

$$\frac{d}{dx} (f - y' f_{y'}) = f_x + y' (f_y - \frac{d}{dx} f_{y'})$$

y si  $y=y(x)$  es una función extremante resultará

$$\frac{d}{dx} (f - y' f_{y'}) = f_x$$



y por la continuidad de  $\int_a^x f_x dt$  en todo  $[a, b]$  se sigue que:

$$\begin{aligned} & f(c^-, y_0(c^-), y'_0(c^-)) - y'_0(c^-) f_{y'}(c^-, y_0(c^-), y'_0(c^-)) = \\ & = f(c^+, y_0(c^+), y'_0(c^+)) - y'_0(c^+) f_{y'}(c^+, y_0(c^+), y'_0(c^+)) \quad (1.10.18) \end{aligned}$$

Resumiendo se tiene:

Si  $y=y_0(x) \in C_{SP}^1[a, b]$  conduce a un mínimo relativo (o máximo) para el funcional  $F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$  en  $\sum_S$ , luego en todos los puntos  $x \in P$  donde  $y'_0$  tiene una discontinuidad, las condiciones de Weiers - trass-Erdman

$$i) \quad f_{y''} \Big|_{c^-} = f_{y''} \Big|_{c^+}$$

$$ii) \quad (f - y' f_{y'}) \Big|_{c^-} = (f - y' f_{y'}) \Big|_{c^+}$$

deben ser satisfechas por  $y = y_0(x)$ .-

### §1.11. FUNCIONALES QUE DEPENDEN DE MAS DE UNA FUNCION

Hasta la sección §1.10 se ha presentado la teoría, en forma resumida, de la "primera variación" en problemas que dependen de una única función. La generalización a problemas que envuelven más de una función puede realizarse fácilmente.-

En forma general esta clase de problemas es del tipo:

Determinar las funciones  $y_1, y_2, \dots, y_n$  tal que hagan mínimo al funcional

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1(x), \dots, y_n(x), \dots, y'_n(x)) dx \quad (1.11.1)$$

debiendo satisfacer ciertas condiciones de contorno en  $x=a$  y  $x=b$  y se supone además que  $y_i \in C^1[a,b]$  o  $C_s^1[a,b]$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).-

Con el objeto de abreviar la notación se introduce:

$$\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \quad \bar{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$$

a su vez con

$$\bar{y} \in C^1[a,b]^n$$

se quiere indicar:

$$y_1 \in C^1[a,b], y_2 \in C^1[a,b], \dots, y_n \in C^1[a,b]$$

(similar para  $\bar{y} \in C_s^1[a,b]^n$ )

La norma debil en  $C^1[a,b]^n$  o  $C_s^1[a,b]^n$  está dada por:

$$\|y\| = \sum_{i=1}^n \max_{[a,b]} |y_i(x)| \quad (1.11.2)$$

y el espacio lineal normado se designará por  $\bar{C}^1[a,b]^n$  o  $\bar{C}_s^1[a,b]^n$ .-

La norma fuerte será:

$$\|y\| = \sum_{i=1}^n \left( \max_{[a,b]} |y_i(x)| + \sup_{[a,b]} |y_i'(x)| \right) \quad (1.11.3)$$

y el e.l.n. se designará por  $\underline{C}^1[a,b]^n$  o  $\underline{C}_s^1[a,b]^n$ .-

Resulta evidente que el espacio de funciones admisibles, cuando se investiga extremos debiles, está definido por:

$$\Sigma = \left\{ \bar{y}; \bar{y} \in \underline{C}^1[a,b]^n, \bar{y}(a)=\bar{y}_a, \bar{y}(b)=\bar{y}_b \right\} \quad (1.11.4)$$

o por:

$$\Sigma_s = \left\{ \bar{y}; \bar{y} \in \underline{C}_s^1[a,b]^n, \bar{y}(a)=\bar{y}_a, \bar{y}(b)=\bar{y}_b \right\} \quad (1.11.5)$$

donde  $\bar{y}_a$  e  $\bar{y}_b$  son vectores que definen las condiciones de contorno.-

Definido el espacio de funciones admisibles por (1.11.4) o por

(1.11.5), el espacio de variaciones admisibles será:

$$H = \left\{ \bar{h}; \bar{h} \in \underline{C}^1[a, b]^n, \bar{h}(a)=0, \bar{h}(b)=0 \right\} \quad (1.11.6)$$

o

$$H_S = \left\{ \bar{h}; \bar{h} \in \underline{C}_S^1[a, b]^n, \bar{h}(a)=0, \bar{h}(b)=0 \right\} \quad (1.11.7)$$

La condición necesaria para que en  $\bar{y}_0 \in \underline{C}^1[a, b]^n$  ( o  $\underline{C}_S^1[a, b]^n$  ) se alcance un mínimo relativo debil (o máximo) de  $F(\bar{y})$  en  $\Sigma$  (o  $\Sigma_S$ ), es que

$$F(\bar{y}_0 + \bar{h}) - F(\bar{y}_0) \gg 0 \quad (o \leq 0) \quad (1.11.8)$$

Si se supone  $F$  definido en  $\Sigma_S$  (têngase presente que  $\Sigma \subset \Sigma_S$ ), que  $\bar{y}(x) = \bar{y}_0(x) \in \underline{C}_S[a, b]^n$  minimiza  $F(\bar{y})$ , que  $f \in C^1(\mathcal{R})$  donde  $\mathcal{R}$  es el espacio  $(x, \bar{y}, \bar{y}')$  que contiene todos los elementos lineales de  $\bar{y}_0(x)$  incluso  $(x_r, \bar{y}_r, \bar{y}_r')$  para  $r=1, \dots, m$  donde  $x_r \in P = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  conjunto finito de puntos donde  $\bar{y}'$  es discontinua y si se toma

$$H_k = \left\{ h_k; h_k \in \underline{C}_{SP}^1[a, b], h(a)=0, h(b)=0 \right\}$$

donde  $k \in K = (1, 2, \dots, n)$ ; nótese que  $H_k \subset H_S$  definido en (1.11.7) luego:

$$\begin{aligned} F(y_0^1, y_0^2, \dots, y_0^k + h_k, \dots, y_0^n) &= \\ &= \int_a^b f(x, y_0^1, \dots, y_0^k + h_k, y_0'^1, \dots, y_0'^k + h_k', \dots, y_0'^n) dx \end{aligned}$$

puede verse como un funcional que depende de una única función es decir:

$$F(y_0^1, y_0^2, \dots, y_0^k + h_k, \dots, y_0^n) = F(y_k) \quad (1.11.9)$$

y como por hipótesis  $y_k = y_0^k$  conduce a un mínimo luego:

$$F(y_0^k + h_k) - F(y_0^k) \gg 0 \quad (1.11.10)$$

resultando necesariamente

$$\left. \frac{d}{dt} F(y_0^k + th_k) \right|_{t=0} = \delta F(h_k) = 0 \quad (1.11.11)$$

para todo  $h_k \in H_k$ . Recordando (1.8.3)

$$\delta F(h_k) = \int_a^b [f_{y_k}(x, \bar{y}_0, \bar{y}_0') h_k + f_{y_k'}(x, \bar{y}_0, \bar{y}_0') h_k'] dx = 0 \quad (1.11.12)$$

del lema de Dubois-Raymond se sigue que:

$$f_{y_k'}(x, \bar{y}_0, \bar{y}_0') = \int_a^x f_{y_k}(t, \bar{y}_0(t), \bar{y}_0'(t)) dt + C \quad (1.11.13)$$

que deberá verificarse en todo  $x \in [a, b]$  excepto en  $x \in P$ ; en forma similar a lo analizado en §1.10 se tiene:

$$f_{y_k}(x, \bar{y}_0(x), \bar{y}_0'(x)) - \frac{d}{dx} f_{y_k'}(x, \bar{y}_0(x), \bar{y}_0'(x)) = 0 \quad (1.11.14)$$

que deberá verificarse para  $\bar{y} = \bar{y}_0$  en todo intervalo en que  $y_0'$  no sea discontinua. Las (1.11.13) y (1.11.14) no son otra cosa que la ecuación de Euler-Lagrange en forma integral y diferencial respectivamente para este tipo de funcionales.-

Si se integra por parte el segundo término del segundo miembro, de (1.11.12), y si se supone que

$$h_k \in H_k = \left\{ h_k; h_k \in C_{-SP}^1[a, b] \right\}$$

resultan las siguientes condiciones naturales de contorno

$$\left. f_{y_k'}(x, \bar{y}_0(x), \bar{y}_0'(x)) \right|_{x=a} = 0 \quad (1.11.15)$$

$$f_{y'_k}(x, \bar{y}_0(x), \bar{y}'_0(x)) \Big|_{x=b} = 0 \quad (1.11.16)$$

Las condiciones de Weierstrass-Erdman para el caso de extremales con "puntos" angulosos serían, según se vio en la sección §1.10:

$$f_{y'_k} \Big|_{x=x_r^-} = f_{y'_k} \Big|_{x=x_r^+} \quad (1.11.17)$$

$$\left( f - \sum_{k=1}^n y'_k f_{y'_k} \right) \Big|_{x=x_r^-} = \left( f - \sum_{k=1}^n y'_k f_{y'_k} \right) \Big|_{x=x_r^+} \quad (1.11.18)$$

donde  $x_r \in P$ .-

Dado que  $k$  es un elemento cualquiera del conjunto  $K$  resulta evidente que (1.11.13) a (1.11.18) deben verificarse para  $k=1, \dots, n$ .-

Resumiendo se puede decir<sup>(3)</sup>:

Si  $\bar{y} = \bar{y}_0(x) \in C^1_s[a, b]^n$  hace mínimo el funcional

$$F(\bar{y}) = \int_a^b f(x, \bar{y}, \bar{y}') dx$$

donde se supone que  $f \in C^1(\mathcal{A})$ ,  $\mathcal{A}$  es el espacio  $(x, \bar{y}, \bar{y}')$  que contiene todo elemento lineal de  $\bar{y} = \bar{y}_0$ , en

$$\Sigma_s = \left\{ \bar{y}; \bar{y} \in C^1_s[a, b]^n, \bar{y}(a) = \bar{y}_a, \bar{y}(b) = \bar{y}_b \right\}$$

$$o \quad \Sigma'_s = \left\{ \bar{y}; \bar{y} \in C^1_s[a, b]^n \right\}.$$

es necesario que  $\bar{y} = \bar{y}_0(x)$  satisfaga la ecuación de Euler-Lagrange en forma integral (1.11.13), en todo intervalo donde  $\bar{y}_0$  sea continua debe satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange (1.11.14), las condiciones de Weierstrass-Erdman (1.11.17) y (1.11.18) deben verificarse en todo punto donde  $\bar{y}'_0$  sea discontinua, y en el caso de estar  $F(\bar{y})$  defi-

nido en  $\Sigma'$  las condiciones naturales (1.11.15) y (1.11.16) se cumplen para las funciones extremales.-

## §1.12. FUNCIONALES QUE DEPENDEN DE FUNCIONES CON MAS DE UNA VARIABLE INDEPENDIENTE

En esta sección se presenta primero el caso de problemas variacionales en que intervienen dos variables independientes y una sola función. La generalización para mas variables y funciones seguiría un camino similar<sup>(2,3,7,8)</sup>.-

Sea  $J$  una curva cerrada, continua, en el plano  $xy$  definida por:

$$x = x(t) , y = y(t) \quad a \leq t \leq b$$

tal que

$$x(t), y(t) \in C^1[a, b]$$

$$\{x(t_i), y(t_i)\} \neq \{x(t_k), y(t_k)\} \quad \text{para } i \neq k, a \leq t_i, t_k \leq b$$

$$\{x(a), y(a)\} = \{x(b), y(b)\}$$

$$\{x'(t), y'(t)\} \neq \{0, 0\} \quad \text{para todo } t \in [a, b]$$

Esta curva  $J$  divide al plano  $xy$  en dos conjuntos de puntos (Figura 1.2) uno llamado "interior" y otro "exterior" a  $J$ . Sea  $A$  el conjunto interior incluyendo  $J$ .-

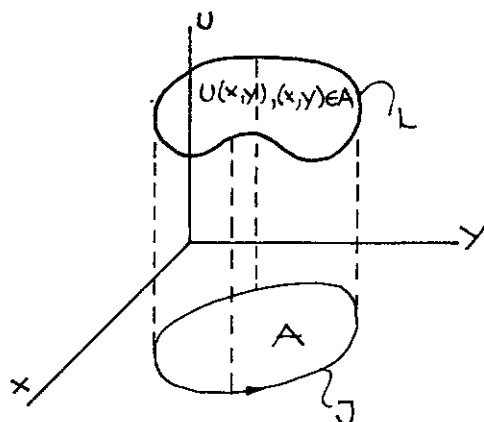


Figura 1.2

Con estos elementos se plantea el siguiente problema variacional  
 Determinar la función  $u=u(x,y) \in C^1[A]$ , que satisface ciertas condiciones de contorno

$$u(x(t), y(t)) = u(t), \quad u(t) \in C^1[a, b], \quad u(a) = u(b) \quad (1.12.1)$$

en  $J$ , tal que minimice el funcional

$$F(u) = \int_A f(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) \, dx \, dy \quad (1.12.2)$$

Nótese que el conjunto  $(x(t), y(t), u(t); t \in [a, b])$  representa una curva  $L$  en el espacio  $(x, y, u)$ , resulta evidente por tanto que las condiciones de contorno (1.12.1) indican que la superficie  $u=u(x, y)$  debe pasar por  $L$ .-

Sea  $u=u_0(x, y)$  la solución del problema y defínase el espacio de variaciones admisibles por:

$$H = \left\{ h(x, y); h \in C^1[a, b], h(x(t), y(t)) = 0 \text{ para } a \leq t \leq b \right\}$$

donde

$$\|h\| = \max_A |h(x, y)| + \max_A |h_x(x, y)| + \max_A |h_y(x, y)|$$

Como  $u_0$  hace mínimo (1.12.2) resulta como condición necesaria

$$F(u_0 + h) - F(u_0) \geq 0$$

para todo  $h \in H$ ,  $\|h\| < \delta$  para algún  $\delta > 0$ .-

Si, como en las secciones precedentes, se supone  $f \in C^1(\mathcal{R})$  donde  $\mathcal{R}$  es el dominio en el espacio  $(x, y, u, u_x, u_y)$  que contiene todos los elementos "planos" de  $u_0$ ,  $(x_0, y_0, u_0(x_0, y_0), u_{0x}(x_0, y_0), u_{0y}(x_0, y_0))$  para todo  $(x_0, y_0) \in A$ , existe la primera variación de  $F(u)$  que estará da

da por:

$$\left. \frac{d}{dl} F(u + lh) \right|_{l=0} = \delta F(h) = \int_A (f_u h + f_{u_x} h_x + f_{u_y} h_y) dx dy \quad (1.12.3)$$

De acuerdo a lo ya analizado necesariamente:

$$\delta F(h) = \int_A (f_u h + f_{u_x} h_x + f_{u_y} h_y) dx dy = 0 \quad (1.12.4)$$

para todo  $h \in H$ ,  $\|h\| < \delta_-$ .

Integrando por parte los dos últimos términos de (1.12.4) se tiene:

$$\begin{aligned} \int_A (f_{u_x} h_x + f_{u_y} h_y) dx dy &= \int_J (f_{u_x} l + f_{u_y} m) h ds - \\ &- \int_A \left( \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} \right) h dx dy \end{aligned} \quad (1.12.5)$$

donde  $l, m$  son los cosenos directores de la normal saliente a  $J$ .

Recordando que  $h(x, y) \Big|_{(x, y) \in J} = 0$  resultará de (1.12.4) y (1.12.5)

que:

$$\delta F(h) = \int_A h \left( f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} \right) dx dy = 0 \quad (1.12.6)$$

Nótese que para poder realizar la integración por parte se deben imponer ciertas restricciones sobre  $f$  y  $u$  ( $f \in C^2(\mathcal{R})$ ,  $u \in C^2[A]$ ).-

La generalización del lema fundamental del cálculo de variaciones<sup>(2,8)</sup> permite deducir de (1.12.5) que:

$$f_u - \frac{\partial}{\partial x} f_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{u_y} = 0 \quad (1.12.7)$$

debe verificarse necesariamente para  $u = u_0(x, y)$ . La (1.12.7) es la ecuación (diferencial) de Euler-Lagrange.-



De la misma manera que en secciones precedentes la (1.12.7) puede obtenerse a partir de  $\delta F(h) = 0$  pero con restricciones menos severas sobre  $f$  y  $u$  ( $f \in C^1(\mathcal{A})$ ,  $u \in C_s^1[A]$ ) aplicando para ello el lema de Dubois-Reymond, cuya generalización puede verse en Akhiezer N. I.(8), se obtiene así la ecuación de Euler-Lagrange en forma integral:

$$\int_w f_u(x, y, u_o, u_{ox}, u_{oy}) \, dx \, dy = \int_j \left[ f_{u_x}(x, y, u_o, u_{ox}, u_{oy}) \, dy - f_{u_y}(x, y, u_o, u_{ox}, u_{oy}) \, dx \right] \quad (1.12.8)$$

que debe verificarse necesariamente para que  $u = u_o(x, y)$  minimice  $F(u)$  en toda región  $w \subset A$  limitada por la curva cerrada  $j$ . Nótese que  $u_o(x, y) \in C_s^1[A]$  si  $u_o \in C[A]$  y  $(u_{ox}, u_{oy}) \in C[A]$  excepto para un número finito de puntos aislados de  $A$  y un número finito de curvas de longitud finita donde  $u_{ox}$  y  $u_{oy}$  son discontinuas.-

A su vez de (1.12.8) y desde que  $f \in C^1(\mathcal{A})$  resulta:

$$(f_{u_x} l + f_{u_y} m) \Big|_{j^-} = (f_{u_x} l + f_{u_y} m) \Big|_{j^+} \quad (1.12.9)^{\hat{}}$$

donde  $l$  y  $m$  son los cosenos directores de la normal saliente a  $j$  como perteneciente a  $w$ . La (1.12.9) es la condición de Weierstrass-Erdmann que debe verificarse en todo  $j$  donde  $u_{ox}$  y  $u_{oy}$  sea discontinua.-

<sup>^</sup> Con  $g(x, y) \Big|_{j^-}$  se quiere indicar el valor de  $g(x, y)$  en  $j$  pero del lado "interior" a  $j$ , mientras que con  $g(x, y) \Big|_{j^+}$  se indica lo mismo pero del lado exterior.-

Resulta evidente por otro lado que en el caso de  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y  $m$  funciones  $u_1, u_2, \dots, u_m$  la ecuación (diferencial) de Euler-Lagrange (1.12.7) toma la forma:

$$f_{u_k} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f_{u_{kx_i}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (1.12.10)$$

### §1.13. FUNCIONALES QUE DEPENDEN DE DERIVADAS DE ORDEN

#### SUPERIOR

Se analizará el caso de funcionales de la forma:

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x), y''(x)) dx \quad (1.13.1)$$

La generalización para derivadas de orden superior al segundo seguiría un camino similar.-

Sea entonces determinar la función  $y=y(x) \in C^2[a, b]$  que, cumpliendo con las condiciones de contorno

$$y(a) = y_a, y(b) = y_b, y'(a) = y'_a, y'(b) = y'_b \quad (1.13.2)$$

minimice al funcional (1.13.1).-

Se podrá adoptar el siguiente espacio de funciones admisibles

$$\Sigma = \left\{ y; y \in C^2[a, b], y(a)=y_a, y(b)=y_b, y'(a)=y'_a, y'(b)=y'_b \right\} \quad (1.13.3)$$

donde

$$\|y\| = \max_{[a, b]} |y(x)| + \max_{[a, b]} |y'(x)| + \max_{[a, b]} |y''(x)| \quad (1.13.4)$$

Si se supone que  $y=y_0(x)$  es la solución del problema puede definirse el siguiente espacio lineal de variaciones admisibles

$$H = \left\{ h; h \in C^2[a, b], h(a)=0, h(b)=0, h'(a)=0, h'(b)=0 \right\} \quad (1.13.5)$$

Como por hipótesis  $y=y_0(x)$  hace mínimo (1.13.1) resulta como condición necesaria que

$$F(y_0+h) - F(y_0) \geq 0$$

para todo  $h \in H$ ,  $\|h\| < \delta$ , para algún  $\delta > 0$ .

Si se supone que  $f \in C^1(\mathcal{R})$ , donde  $\mathcal{R}$  es el dominio en el espacio- $(x, y, y', y'')$  que contiene todos los elementos lineales  $(x_0, y_0(x_0), y'(x_0), y''(x_0))$  en todo  $x_0 \in [a, b]$  de  $y=y_0(x)$ , existe la primera variación de  $F(y)$  que estará dada por

$$\delta F(h) = \left. \frac{d}{dt} F(y_0+th) \right|_{t=0} = \int_a^b (f_y h + f_{y'} h' + f_{y''} h'') dx \quad (1.13.6)$$

de acuerdo a lo ya analizado necesariamente

$$\delta F(h) = \int_a^b (f_y h + f_{y'} h' + f_{y''} h'') dx \quad (1.13.7)$$

para todo  $h \in H$ ,  $\|h\| < \delta$ ,  $\delta > 0$ .

Integrando por parte los dos últimos términos de (1.13.7), para lo cual  $f \in C^3(\mathcal{R})$  e  $y \in C^4[a, b]$

$$\int_a^b f_{y'} h' dx = f_{y'} h \Big|_a^b - \int_a^b h \frac{d}{dx} f_{y'} dx$$

$$\int_a^b f_{y''} h'' dx = f_{y''} h' \Big|_a^b - \frac{d}{dx} f_{y''} h' \Big|_a^b + \int_a^b h \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} dx$$

como  $h \in H$  resulta

$$f_{y'} h' \Big|_a^b = 0 \quad (1.13.7.a)$$

$$\left( f_{y''} - \frac{d}{dx} f_{y''} \right) h' \Big|_a^b = 0 \quad (1.13.7.b)$$

por lo que (1.13.7) resulta:

$$\delta F(h) = \int_a^b h \left( f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} \right) dx = 0 \quad (1.13.8)$$

y por el lema fundamental del cálculo de variaciones se llega a

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} = 0 \quad (1.13.9)$$

que es la ecuación de Euler-Lagrange para el problema propuesto y que  $y=y_0(x)$  debe satisfacer.-

Se podrá ver en el Anexo A la obtención de (1.13.9) a partir de la condición necesaria  $\delta F(h)=0$  y del lema de Dubois-Raymond, en la que se toman condiciones menos severas sobre  $y=y(x)$ , a la vez que se amplía el campo de funciones admisibles de manera de incluir las funciones  $y=y(x)$  seccionalmente continuas.-

Puede observarse ( vease (1.13.7.a - b) ) que si el espacio de variaciones admisibles fuera

$$\bar{H} = \left\{ h; h \in C^2[a, b] \right\}$$

es decir  $y=y(x)$  está libre de toda restricción en el contorno, se verifica que

$$f_{y''} \Big|_{x=a} = 0 \quad , \quad f_{y''} \Big|_{x=b} = 0 \quad (1.13.10)$$

$$\left( f_{y'} - \frac{d}{dx} f_{y''} \right) \Big|_{x=a} = 0 \quad , \quad \left( f_{y'} - \frac{d}{dx} f_{y''} \right) \Big|_{x=b} = 0 \quad (1.13.11)$$

Las condiciones naturales de contorno son por tanto (1.13.10) y (1.13.11).-

La generalización a problemas donde el funcional depende de derivadas de orden  $n$  seguiría los mismos pasos indicados anteriormente y la ecuación de Euler-Lagrange toma en este caso la forma <sup>(1,2,3,7,8)</sup> :

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} = 0 \quad (1.13.12)$$

Una ecuación análoga a la (1.13.12) puede obtenerse para el caso de funcionales dependientes de funciones de varias variables independientes y de derivadas de orden superior, por ejemplo para el funcional<sup>(8)</sup>

$$F(u) = \int_D f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) \, dD \quad (1.13.13)$$

y si  $f \in C^3(\mathcal{R})$  donde  $\mathcal{R}$  es ahora el espacio  $(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$  que contiene todos los elementos planos de  $y=y_0(x, y)$  para todo  $(x, y) \in [D]$  y si  $y=y_0(x, y) \in C^4[\bar{D}]$  conduce a un mínimo relativo débil (o máximo relativo débil), deberá satisfacer la ecuación diferencial (ecuación de Euler-Lagrange del problema propuesto):

$$f_u - \frac{d}{dx} f_{u_x} - \frac{d}{dy} f_{u_y} + \frac{d^2}{dx^2} f_{u_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f_{u_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_{u_{yy}} = 0 \quad (1.13.14)$$

## C A P I T U L O   I I .   M E T O D O   D E   R I T Z

### §2.1. METODOS DIRECTOS

La idea básica que se usó para resolver cierto problema variacional ( y por tanto para probar la existencia de la solución) era la de reducir el problema a otro que envuelve ecuaciones diferenciales ( o sistemas de ecuaciones diferenciales). Sin embargo esto no siempre es efectivo, a la vez que puede resultar muy complicado por cuanto lo que se procura al resolver un problema variacional no es la solución de la correspondiente ecuación diferencial en una vecindad de un cierto punto (como es usual en la teoría de las ecuaciones diferenciales) si no la solución en una cierta región  $D$ , de tal manera que satisfaga en el contorno de  $D$  ciertas restricciones (condiciones de contorno). Las dificultades inherentes a esta forma de resolver el problema ( especialmente en el caso de varias variables independientes como así también en el caso de ecuaciones diferenciales parciales) han dado origen a métodos variacionales conocidos con el nombre de "métodos directos" que no reducen el problema a otro que envuelve ecuaciones diferenciales.-

Los métodos directos han probado por otro lado, ser útiles en la teoría de las ecuaciones diferenciales ya que si una cierta ecuación diferencial puede considerarse como la ecuación de Euler-Lagrange de un cierto funcional y si se usa los métodos directos para establecer la función extremal, se prueba la existencia de la solución para la ecuación diferencial dada y para las condiciones de contorno a que el

funcional responde. Por tanto se tiene que los métodos directos establecen por un lado la existencia de la solución de la ecuación diferencial (ecuación de Euler-Lagrange) y por otro proveen un medio para obtener soluciones aproximadas.-

## §2.2. SECUENCIAS MINIMIZANTES

Son numerosas las técnicas involucradas bajo la denominación "métodos directos", sin embargo están basados en general en una misma idea que es la siguiente.-

Considérese el problema de determinar el mínimo del funcional  $F(u)$  definido en el espacio  $S$  de funciones admisibles  $u$ . Para que el problema tenga sentido se supone que en  $S$  existen funciones  $u$  para las cuales  $F(u) < +\infty$  y aún más que:

$$\inf_u F(u) = d > -\infty \quad (2.2.1)$$

donde el mayor de todos los límites inferiores es tomado sobre todos los  $u \in S$ .-

Sea  $\hat{u} \in S$  la solución exacta del problema planteado esto es:

$$F(\hat{u}) = d \quad (2.2.2)$$

Ahora bien, si se puede construir la función  $\bar{u}$ ,  $\bar{u} \in S$ , tal que el valor  $F(\bar{u})$  pueda aproximarse lo más posible a  $d$ , se podrá esperar que  $\bar{u}$  sea una buena aproximación de  $\hat{u}$ . Aún más si "existiera" una "secuencia minimizante"  $\{u_n\}$ ,  $u_n \in S$ , esto es una secuencia infinita de funciones  $\{u_n\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$  todas satisfaciendo las condiciones de contorno que permiten definir  $S$ , tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = d \quad (2.2.3)$$

y si la secuencia  $\{u_n\}$  tiene un límite  $\tilde{u}$ , y si es legítimo escribir

$$F(\tilde{u}) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) \quad (2.2.4)$$

esto es

$$F(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) \quad (2.2.5)$$

luego

$$F(\tilde{u}) = d \quad (2.2.6)$$

y se podrá esperar que esta secuencia converge, en algún sentido, a la solución  $\hat{u}$ .-

Sin embargo el problema desde el punto de vista práctico es uno, no el de la "existencia" pero si el de la "construcción" de tal secuencia minimizante<sup>(10)</sup>.-

Luego para resolver un problema variacional via "métodos directos" se deberá<sup>(2)</sup>:

- i) Construir una secuencia minimizante  $\{u_n\}$ .-
- ii) Probar que  $\{u_n\}$  converge, en algún sentido a una función  $\tilde{u}$ .-
- iii) Probar la legitimidad del límite (2.2.4).-

## §2.3. METODO DE RITZ. PRINCIPIOS Y ASPECTOS TEORICOS<sup>†</sup>

Para la construcción de una "secuencia minimizante" Ritz propone lo siguiente.-

<sup>†</sup> Se supone que la solución exacta del problema variacional existe.-



Supóngase que se desea obtener el mínimo de un funcional  $F(u)$  de finido en un espacio de funciones admisibles  $S$  que por simplicidad se tomará un e.l.n.-

Sea:

$$w_1, w_2, \dots, w_n, \dots \quad (2.3.1)$$

un conjunto infinito de "funciones coordenadas" linealmente independientes<sup>†</sup> pertenecientes a  $S$ , y sea  $S_n$  el subespacio lineal de  $S$  formado por el conjunto de todas las combinaciones lineales que se pueden formar con los  $n$  primeros elementos del conjunto (2.3.1), esto es<sup>††</sup>:

$$a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n w_n \quad (2.3.2)$$

donde  $a_1 \dots a_n \in R$ , conjunto de números reales.-

<sup>†</sup> Se dice que  $w_1, w_2, \dots, w_n$  son linealmente independiente si

$$b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_n w_n = 0 \text{ si y solo si } b_i = 0 \text{ (} i=1, \dots, n \text{)}$$

<sup>††</sup> Nótese que se está suponiendo que las condiciones de contorno son homogéneas o las naturales, en caso de que  $S$  no sea un e.l. lo más sencillo será tomar

$$w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$$

conjunto infinito de funciones coordenadas que satisfacen las condiciones homogéneas de contorno, y  $S_n$  se tomará como el conjunto de todas las combinaciones lineales de la forma:

$$W_0 + a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_n w_n$$

donde  $W_0$  es una función que satisface las condiciones de contorno, claramente estas combinaciones lineales pertenecen a  $S$ .-

Resulta evidente que en cada subespacio  $S_n$  el funcional  $F(u)$  conduce a la función

$$F(u) = F(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (2.3.3)$$

función de  $n$  parámetros  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Desde que se desea el mínimo de  $F(u)$ , los parámetros  $a_i$  deben satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial F(u)}{\partial a_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3.4)^{\hat{}}$$

A la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones anteriores será designada por "matriz-Ritz" y a los parámetros incógnitas  $a_i$  como "coeficientes-Ritz".

Al resolver el sistema (2.3.4) se obtienen valores definidos de los parámetros  $a_i$  y que se convendrá en designarlos por  $a_i^n$ , donde el índice  $n$  está indicando que son los valores de los parámetros  $a_i$  obtenidos cuando se expande  $S$  con las  $n$  primeras funciones coordenadas (2.3.1). En otras palabras se han elegido los  $a_i$  de manera que minimicen (2.3.3), denótese por  $d_n$  tal mínimo y al elemento de  $S_n$  que conduce al mínimo por  $u_n$ , esto es:

$$u_n = a_1^n w_1 + a_2^n w_2 + \dots + a_n^n w_n = \sum_{k=1}^n a_k^n w_k \quad (2.3.5)$$

conocida con el nombre de "representación-Ritz".

<sup>^</sup> En los problemas considerados en este trabajo  $F$  es un funcional cuadrático de modo que (2.3.4) conduce a un sistema de  $n$  ecuaciones lineales para los parámetros  $a_i$ .

En general lo anterior es mas simple que encontrar el mínimo de  $F(u)$  en si mismo.-

Desde que cada combinación lineal de la forma (2.3.2) es automáticamente una combinación lineal de  $w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}$ , esto es, desde que cada subespacio de la secuencia

$$S_1, S_2, \dots \quad (2.3.6)$$

está contenido en el siguiente, resulta claro que  $d_n$  no crece con  $n$ , es decir:

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq \dots \quad (2.3.7)$$

Ahora bien, bajo qué condiciones puede afirmarse que la secuencia de funciones  $u_1, u_2, \dots$  es una secuencia minimizante, esto es que la secuencia de números reales  $F(u_1), F(u_2), \dots$  tiende al verdadero límite  $d$  ?:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = F(\hat{u}) = d \quad (2.3.8)$$

Puede demostrarse que la condición suficiente para ello es que el conjunto de funciones coordinadas (2.3.1) sea "completo".-

DEFINICION 2.3.1. El conjunto de funciones coordinadas se dice completo en  $S$ , si dado cualquier  $u \in S$  y un  $\delta > 0, \delta \in \mathbb{R}$ , existe una combinación lineal  $q_n$  de la forma (2.3.2) tal que  $\|q_n - u\| < \delta$ , para todo  $n \geq N(\delta)$ .

TEOREMA 2.3.1. Si  $F(u)$  es continuo (en el sentido de la norma de  $S$ ), y si (2.3.2) es completo luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d \quad (2.3.9)$$

$$\text{donde } d = \inf_u F(u) \quad (2.3.10)$$

La demostración de esto puede hacerse de la siguiente manera:

Sea  $\hat{u}$  la solución exacta del problema, luego  $F(\hat{u}) = d$ , dada la definición (2.3.10) y dada la continuidad de  $F$  siempre es posible encontrar en  $S$  una función  $u$  tal que

$$F(u) - F(\hat{u}) < \varepsilon \quad (2.3.11)$$

donde  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ .

Desde que el sistema de funciones coordenadas es completo es posible determinar la combinación lineal  $q_n$ , de la forma (2.3.2), tal que

$$\|q_n - u\| < \delta, \delta > 0, n > N = N(\delta) \quad (2.3.12)$$

De (2.3.11) y (2.3.12) se sigue que para un  $\varepsilon > 0$ , siempre será posible determinar un  $n > N$  tal que

$$F(q_n) < F(\hat{u}) + \varepsilon \quad (2.3.13)$$

Si se designa con  $u_n$  la combinación lineal de la forma (2.3.2), que hace mínimo a  $F(u)$  en  $S_n$  resulta (recuérdese que  $\{u_n\}$  es una sucesión minimizante)

$$F(\hat{u}) \leq F(u_n) \leq F(q_n) \quad (2.3.14)$$

De (2.3.13) y (2.3.14) se sigue

$$d = F(\hat{u}) \leq F(u_n) \leq F(q_n) < F(\hat{u}) + \varepsilon = d + \varepsilon \quad (2.3.15)$$

y desde que  $\varepsilon$  es un número arbitrariamente pequeño, en el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d \quad (2.3.16)$$

Ahora bien, en este punto es necesario hacer una importante aclaración

Mientras que la convergencia de  $F(u_n)$  a  $d$  queda asegurada, no resulta generalmente cierto que  $u_n$  converge a  $\hat{u}$ , solución exacta del problema planteado, o aún mas que las derivadas de  $u_n$  tienden a las correspondientes de  $\hat{u}$ . Sin embargo una investigación comparativa de diferentes tipos de problemas variacionales realizada por R. Courant<sup>(10)</sup> revelan que, hablando en forma general, la convergencia de la secuencia minimizante  $\{u_n\}$  y de la secuencia de sus derivadas resulta mejorada si el orden de las derivadas que intervienen en el funcional es alto, habiendo una tendencia a desmejorar la convergencia cuando el número de variables independientes crece. Esto sugiere que si en lugar de considerar el funcional, como por ejemplo:

$$F(u) = \int_R (u_x^2 + u_y^2 + 2 u f) dx dy \quad (2.3.17)$$

( $R$  es la región definida por el dominio de variación de las variables independientes)

asociado con la ecuación de Poisson  $\nabla^2 (\nabla u) = f(x,y)$ , ( $\nabla$  es el operador gradiente), se considera el funcional

$$J(u) = \int_R (u_x^2 + u_y^2 + 2 u f + \nabla^2 (\nabla u) - f) dx dy \quad (2.3.18)$$

que también es minimizado por la misma función  $\hat{u}(x,y)$  que minimiza a (2.3.17) ya que  $\nabla^2 (\nabla \hat{u}) - f = 0$ . La secuencia minimizante asociada a  $J(u)$  puede demostrarse que converge más rápidamente que la asociada a  $F(u)$ . Este hecho primeramente mostrado por Courant<sup>(10)</sup> fue luego aplicado por K. N. Shevchenko<sup>†</sup> a problemas elastoestáticos tridimensiona-

---

<sup>†</sup> Shevchenko, K.N., Prikl. Mat. Mekh. Akad. Nauk SSSR, vol. 6 (1942).

les y a problemas de vibraciones en placas elásticas, un ejemplo similar a lo planteado en (2.3.18) puede verse en Y. C. Fung<sup>††</sup>.-

#### §2.4. METODO DE RITZ, ASPECTOS PRACTICOS

Desde el punto de vista práctico todo suceso depende del problema variacional en sí mismo<sup>(10)</sup> como así también de la elección de las "funciones coordenadas". La elección debe hacerse teniendo en cuenta, el problema planteado y el condicionamiento numérico del sistema de ecuaciones (2.3.4) ( vease §2.7 ). Sin embargo en numerosos problemas de la Mecánica de los Solidos el uso de polinomios (algebraicos o trigonometricos) como funciones coordenadas han mostrado ser muy ventajosos, comprobaciones numéricas de esto puede verse en las obras de S. Timoshenko<sup>(19,20,21)</sup>, L. V. Kantorovich<sup>(9)</sup>, F. B. Hildebrand<sup>(13)</sup>, A. E. Love<sup>(22)</sup>, R. Weinstock<sup>(32)</sup>, para el caso particular de torsión en barras puede verse los trabajos de L. Bevilacqua<sup>(5,6)</sup>.-

Desde que solo pocas funciones coordenadas entran en el cálculo, el aspecto teórico de la completitud del conjunto de funciones coordenadas es irrelevante. Es importante que la función inicial ya de por sí sea capaz de aproximarse suficientemente a la solución del problema, vease Capítulo V Aplicaciones Numéricas.-

---

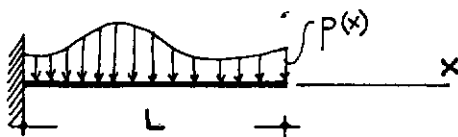
<sup>†</sup> Fung, Y. C., Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, pag. 309-310 (1965).-

## §2.5. CONDICIONES DE CONTORNO

Como se vio en §2.3 las combinaciones lineales de la forma (2.3.2) deben satisfacer las condiciones de contorno del problema. Toda vez que ésto se logra la aproximación obtenida con el método de Ritz es buena a la vez que es alcanzada con muy pocos elementos del conjunto de funciones coordenadas. Resulta claro que si bien la rapidez de la convergencia es mayor por otro lado es difícil encontrar tales combinaciones, a la vez que se pierde generalidad por cuanto una modificación solo en el contorno hace que estas funciones no puedan aplicarse. Para contornos libres o condiciones naturales de contorno la elección de las funciones coordenadas es simple y como regla general el uso de polinomios resulta útil.-

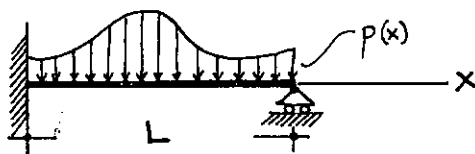
Es necesario destacar aquí que cuando se está hablando de condiciones de contorno libre o naturales  $w_n$  no debe satisfacer ninguna condición particular. Así por ejemplo si se desea resolver el siguiente problema, representado en la Figura 2.1:

Figura 2.1



se tendrá que  $w_n$  debe satisfacer las siguientes condiciones de contorno:  $w(0)=0$ ,  $w'(0)=0$ ,  $w(L)=\text{libre}=w'(L)$ , pero quede claro que si desde que  $w(L)$  es libre se eligiera  $w(L)=C$ , donde  $C$  es una constante fija, se está resolviendo otro problema diferente al planteado, así si  $C=0$  la solución corresponderá al problema representado en la Figura 2.2.-

Figura 2.2



## §2.6. ESTIMACION DEL ERROR

Un punto debil en el método de Ritz es que él no contiene por si mismo un principio para obtener el error cometido en la solución aproximada. Sin embargo cuando problemas de valores de contorno son resueltos aproximadamente es de interes obtener un "límite superior", y un "límite inferior" de la solución exacta esto solo para determina-- dos casos ha sido resuelto satisfactoriamente. Así por ejemplo Trefftz propuso un método para determinar el límite superior e inferior de la rigidez torsional de una barra mediante el uso simultaneo de los Prin cipios de Mínima Energía Potencial Total y Mínima Energía Potencial Complementaria ( vease K. Wuashizu<sup>(33)</sup> pag. 39 ). En numerosos casos, la proximidad entre estos límites es excelente (vease K. Wuashizu pag 125 a 131). Es necesario destacar que son necesarias técnicas mas com plexas que la anterior para el caso que se desee esos límites para los desplazamientos o tensiones en un punto arbitrario de la región donde el funcional está aplicado<sup>(34)</sup>.-

Hasta aqui se han impuesto restricciones algo severas en la elec ción de las funciones coordenadas con el objeto de asegurar un tipo fuerte de convergencia ( convergencia uniforme ) de la secuencia  $\{ F ($



$u_n\}$  , ya que en la DEFINICION 2.3.1. intervino la norma de  $S$  y hasta ahora solo se conocen como norma las dadas en los Ejemplos 1 y 2 §1.2 ( o sus variantes para el caso de mas de una función o derivadas de orden superior ) por lo que  $\delta$  estará dado por

$$\delta = \max |q_n - u| + \max |q'_n - u'|$$

Surge así la necesidad de definir un nuevo tipo de norma en  $S$ , así si se toma

$$\|u\| = \left( \int_R u^2 dR \right)^{1/2}$$

( $R$  es la región definida por el dominio de variación de las variables independientes),  $\delta$  estará dado por

$$\delta \geq \int_R (u_n - u)^2 dR$$

y cuando  $\delta \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$  se dice que  $u_n$  converge a  $u$  en la "media". Este es un tipo de convergencia mas debil que el de la convergencia uniforme. Como puede verse en el Anexo B también se tiene convergencia en la "energía". Practicamente todas las recientes investigaciones<sup>†</sup> de convergencia de varios métodos directos en el cálculo de variaciones, están basados en el criterio planteado en párrafos anteriores, siendo la herramienta mas efectiva en estas investigaciones la provista por la teoría de los operadores lineales en espacios de Hilbert. En el Anexo B se presenta en forma resumida y bajo este último aspecto el con

---

<sup>†</sup> Vease nota al pie de la página siguiente.-

ceptos de funcionales cuadráticos y su mínimo, elementos estos que serán útiles en lo que sigue de este trabajo.-

## §2.7. PROPIEDADES DE LOS COEFICIENTES-RITZ

Sea  $F(u)$  un funcional cuadrático (vease Anexo B ) de la forma:

$$F(u) = ||| u |||_A^2 - 2l(u) \quad (2.7.1)$$

definido en  $H_A$ , espacio energía del operador positivo definido  $A$ , se supone que  $l(u)$  es un operador lineal limitado con respecto a  $||| u |||_A$  ( caso contrario el problema del mínimo de (2.7.1) no tendría sentido).

† Vease las monografías de S. G. Mikhlin "Direct Methods in Mathematical Physics" y "The Problem of the Minimum of a Quadratic Functional".-

Si el método de "Elementos Finitos" se mira como un método directo en el cálculo variacional vease las monografías de:

Arantes e Oliveira, E. R.<sup>(24,25)</sup>, "Theoretical Foundations of the Finite Element Method", Int. J. Solids Structures vol.4 pag. 929-952, "A General Theory of Variational Methods with Application to Finite Elements", Univ. Técnica de Lisboa, Dic. 1972.-

Oden, J. T.<sup>(26)</sup>, "Finite Elements of Nonlinear Continua", 1971.-

Reaid, J. K.<sup>(31)</sup>, "On the Construction and Convergence of Finite Element Solution of Laplac's Equation", J. Inst. Maths. Applics. vol.9 pag. 1-13, 1972.-

Como puede verse en el Anexo B el problema del mínimo de este funcional cuadrático tiene solución en  $H_A$  y aún más esta solución es única: por el teorema de F. Riesz existe un único elemento  $u_0 \in H_A$  tal que  $l(u) = (u, u_0)_A$  de donde:

$$F(u) = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 \quad (2.7.2)$$

El elemento  $u_0$  puede verse como la solución generalizada del problema del mínimo de  $F(u)$  en  $H_A$ .-

Con el objeto de determinar una representación aproximada de  $u_0$ , se vio en secciones anteriores que se debía elegir un sistema de elementos  $\{w_n\} = w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$  llamados "funciones coordenadas", y que debían satisfacer las siguientes propiedades

- i)  $w_n \in H_A$
- ii) para cualquier  $n$   $w_1, w_2, \dots, w_n$  son linealmente independientes
- iii)  $\{w_n\}$  es completa en  $H_A$

La representación aproximada de  $u_0$ , llamada en este trabajo representación-Ritz:

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k^n w_k \quad (2.7.3)$$

es tal que los coeficientes  $a_k^n$ , coeficientes-Ritz, son elegidos de tal manera que  $F(u_n) = \min$ . De (2.7.2) se sigue que ésto es equivalente a

$$\|u - u_0\|_A = \|u_0 - \sum_{k=1}^n a_k^n w_k\|_A = \min \quad (2.7.4)$$

La condición  $F(u_n) = \min$  conduce para  $n=1, 2, \dots, n, \dots$  al método Ritz propiamente dicho y donde los coeficientes  $a_k^n$  están definidos por:

$$\sum_{k=1}^n (w_k, w_j)_A a_k^n = l(w_j) \quad , \quad j=1,2,\dots,n. \quad (2.7.5)$$

o en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (w_1, w_1)_A & (w_1, w_2)_A & \dots & (w_1, w_n)_A \\ (w_2, w_1)_A & (w_2, w_2)_A & \dots & (w_2, w_n)_A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_n, w_1)_A & (w_n, w_2)_A & \dots & (w_n, w_n)_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^n \\ a_2^n \\ \vdots \\ a_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(w_1) \\ l(w_2) \\ \vdots \\ l(w_n) \end{bmatrix} \quad (2.7.6)$$

La ecuación (2.7.4) implica que la construcción de  $u_n$  es equivalente a la construcción de la combinación lineal de los elementos  $w_1, w_2, \dots, w_n$  que sea la "mejor aproximación" a  $u_0$  con respecto a la métrica de  $H_A$  (vease Anexo C). Por los TEOREMA 1. y 2. del Anexo C se pueden listar las siguientes propiedades de los coeficientes-Ritz<sup>(14)</sup>

i) Si  $\{w_n\}$  es mínima en  $H_A$ , luego existe un límite para los coeficientes-Ritz

$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_k^n \quad k=1,2,\dots,n \quad (2.7.7)$$

ii) Si el sistema biortonormal a  $\{w_n\}$  en  $H_A$  es limitado en  $H_A$  luego, el proceso de límite es uniforme respecto a  $k$ .-

iii) Si  $\{w_n\}$  es no-minima en  $H_A$  límites para los coeficientes-Ritz pueden no existir.-

Ejemplo 1. Sea el funcional

$$F(u) = \int_0^1 (u'^2 - 2 \frac{1}{1+x} u) dx, \text{ tal que } u(0) = 0$$

luego  $H = L_2(0,1)$ .  $H_A$  consiste de todas las funciones continuas en  $[0,1]$  nulas en  $x=0$  y con derivadas primeras cuadrado integrables. El

producto escalar y la norma en  $H_A$  están definidos por:

$$(u, v) = \int_0^1 u' v' dx \quad , \quad \|u\|^2 = \int_0^1 u'^2 dx \quad (2.7.8)$$

Si se toma  $\{w_n\} = \{x^k\}$  y aplicando el método de Ritz en el que tanto la matriz-Ritz como los términos independientes de (2.7.6) han sido calculados en forma exacta se tiene que hasta  $n=8$  los coeficientes de Ritz estan dados por

TABLA 2.1 <sup>†</sup>

n	$a_1^n$	$a_2^n$	$a_3^n$	$a_4^n$	$a_5^n$	$a_6^n$	$a_7^n$	$a_8^n$
1	0.3069							
2	0.6480	-0.3411						
3	0.6869	-0.4579	0.0788					
4	0.6922	-0.4899	0.1312	-0.0267				
5	0.6930	-0.4977	0.1547	-0.0541	0.0110			
6	0.6931	-0.4995	0.1631	-0.0708	0.0260	-0.0050		
7	0.6931	-0.4999	0.1657	-0.0786	0.0378	-0.0136	0.0025	
8	0.6931	-0.5000	0.1664	-0.0817	0.0446	-0.0218	0.0075	-0.0013

<sup>†</sup> Extraída de S. G. Mikhlin<sup>(14)</sup> pag. 26.-

De la TABLA 2.1 se sigue que los coeficientes-Ritz exhiben una tendencia a estabilizarse a medida que  $n$  crece, pero ésto no es uniforme así  $a_1^n$  y  $a_2^n$  se estabilizan para  $n=5$  y  $n=7$  respectivamente, mientras que los otros coeficientes exhiben cambios notables. Esta irregularidad se debe a la elección del sistema de funciones coordenadas que puede demostrarse es no-minimo en  $H_A$  con respecto a la norma (2.7.8).-

Ejemplo 2. Se considerará ahora un ejemplo donde la variación de los coeficientes-Ritz es más notable que en el ejemplo anterior.

Sea el problema de la torsión de una barra de material homogéneo y sección rectangular según la teoría de Saint-Venant. Sean los ejes coordenados  $x, y$ , paralelo al lado mayor y menor respectivamente y tal que la intersección de los mismos coincida con el centro geométrico de la sección rectangular sea además  $2b$  y  $2a$  la longitud de esos lados. La función de Tensión está asociada a la minimización del funcional siguiente:

$$F(u) = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2G\theta u \right] dx dy \quad (2.7.9)$$

bajo las condiciones de contorno

$$u(-b, y) = u(b, y) = u(x, -a) = u(x, a) = 0 \quad (2.7.10)$$

$$\text{Designese con } R \text{ a la región } R = \{(x, y); -b \leq x \leq b, -a \leq y \leq a\} \quad (2.7.11)$$

Claramente  $H_A$  es el espacio de todas las funciones con derivadas parciales cuadrado integrables en  $R$ , tal que satisfacen (2.7.10). El producto energía y norma energía están dados por:

$$(u, v)_A = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.7.12)$$

$$\|u\|_A^2 = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (2.7.13)$$

Si se adopta como funciones coordenadas (vease CAPITULO V )

$$(a-y^2)(b-x^2)x^m y^n, \quad (m, n=0, 2, 4, \dots) \quad (2.7.14)$$

Aplicando el método de Ritz a (2.7.9) y tomando de (2.7.14) los 4, 9, y 16 primeros elementos los coeficientes-Ritz resultan dados en la TABLA 2.2 donde solo se presentan 8 coeficientes y donde con  $a_{kl}$  se indica que es el coeficiente-Ritz para el elemento  $(a-y^2)(b-x^2)x^k y^l$ :

TABLA 2.2

n	a <sub>00</sub>	a <sub>02</sub>	a <sub>20</sub>	a <sub>22</sub>	a <sub>40</sub>	a <sub>04</sub>	a <sub>24</sub>	a <sub>42</sub>
4	0.2266	0.0009	0.1349	0.0833				
9	0.2277	0.0054	0.1190	0.0214	0.0248	0.0011	-0.0433	0.0862
16	0.2277	0.0052	0.1174	0.0291	0.0317	0.0005	-0.0018	0.0474

La TABLA 2.2 muestran que para este ejemplo los coeficientes a partir del tercero cambian abruptamente de una aproximación a otra, mientras que el primero y el segundo están estables a partir de  $n = 9$ .

Con el objeto de estimar el error cometido en cada aproximación y desde que la solución exacta del problema planteado es conocido, se podrá evaluarla norma energía de la diferencia  $u_0 - u_n$  ( $n=4,9,16$ ), donde con  $u_0$  se indica la solución exacta, y usar esta norma para examinar la exactitud de la solución aproximada.

Usando la expresión (15)

$$\|u_0 - u_n\|_A^2 = \|u_0\|_A^2 - \|u_n\|_A^2 \quad (2.7.15)$$

y desde que para el problema planteado resulta (vease Anexo E)

$$\|u_0\|_A^2 = G \theta^2 C_0, \quad \|u_n\|_A^2 = G \theta^2 C_n \quad (2.7.16)$$

donde  $C_0$  y  $C_n$  son la rigidez torsional exacta y aproximada respectivamente de la sección. De (2.7.15) y (2.7.16) se sigue

$$\|u_0 - u_n\|_A^2 = (C_0 - C_n) G \theta^2$$

Suponiendo  $G \theta^2 = 1$  y tomando los siguientes valores extraídos del CA

PITULO V:  $C_0=0.4580$ ,  $C_4=0.4571$ ,  $C_9=0.4573$ ,  $C_{16}=0.4574$ , se tiene:

$$\|u_0 - u_4\| = \sqrt{\|u_0\|^2 - \|u_4\|^2} = \sqrt{0.458 - 0.4571} = 0.0009 = 0.03$$

$$\|u_0 - u_9\| = \sqrt{\|u_0\|^2 - \|u_9\|^2} = \sqrt{0.458 - 0.4573} = 0.0007 < 0.026$$

$$\|u_0 - u_{16}\| = \sqrt{\|u_0\|^2 - \|u_{16}\|^2} = \sqrt{0.458 - 0.4574} = 0.0006 < 0.024$$

Por otro lado de (2.7.13) y de la desigualdad de Schwartz-Bunyakovskii se obtiene para la estimación del error la siguiente expresión

$$|u_0 - u_n| < \|u_0 - u_n\|$$

En particular para  $n=4$  se tiene

$$|u_0 - u_4| < 0.03 \quad (2.7.17)$$

y para el punto de coordenadas  $x=0$ ,  $y=0$  se tiene

$$|u_0(0,0) - u_4(0,0)| = 0.0011$$

como se ve el error real es considerablemente menor que el límite establecido en (2.7.17).-

En la base de los resultados presentados en la presente sección se podrá hacer la siguiente observación: en sí mismo la variación de los coeficientes-Ritz de una aproximación a la siguiente no es un defecto de la solución aproximada. Si la solución aproximada es calculada ( $u_n$ ,  $n=1,2,\dots$ ) sin serios errores (refiriéndose estos errores a la exactitud con que se calcula: los coeficientes de la matriz-Ritz, del término independiente del sistema de ecuaciones (2.7.6) y a la exactitud con que se resuelve el sistema de ecuaciones), luego para  $n$  "suficientemente grande"  $u_n$  puede aproximarse con la exactitud que se desee a la solución exacta independientemente de la presencia o no de



la variación de los coeficientes . Sin embargo la presencia de esta variación en los coeficientes-Ritz no es deseable, ella indica que el conjunto de funciones coordenadas es no-mínimo y a su vez puede implicar una "inestabilidad en los resultados" cuando ocurren errores en una etapa del cálculo.-

Con respecto a esta "inestabilidad" puede decirse que toda vez que el sistema de funciones coordenadas es no-mínimo y se cometan errores, en cuanto a exactitud, en el cálculo de los coeficientes de la matriz-Ritz como en los términos independientes de (2.7.6) como así también la aparición inevitable de errores de redondeo en la solución del sistema de ecuaciones, pueden disminuir y a veces anular completamente el efecto usual de que cuando  $n$  crece  $u_n$  se aproxima a la solución exacta. Un ejemplo de esto puede verse en el CAPITULO V. El problema de "inestabilidad" está asociado por tanto al sistema de funciones coordenadas como así también al "condicionamiento numérico" de la matriz-Ritz ( vease D. K. Faddeev, V. N. Faddeeva "Numerical Methods of Linear Algebra"). Algunas consideraciones sobre la estabilidad del método de Ritz y de otros métodos, tales como el de Bubnov-Galerkin , pueden verse en S. G. Mikhlin , "The Numerical Performance of Variational Methods".-

### C A P I T U L O III. FUNCIONALES RELAJADOS

#### §3.1. INTRODUCCION

En el capítulo anterior y en el Anexo B se vio que dado el funcional cuadrático

$$F(u) = \|u\|_A^2 - l(u) \quad (3.1.1)$$

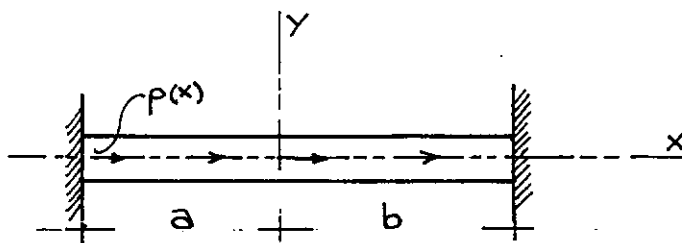
definido en  $H_A$  y tal que  $l(u)$  sea un operador lineal limitado en  $H_A$ , existe un único elemento  $u_0 \in H_A$  tal que hace mínimo a (3.1.1). Por otro lado si se tiene  $\{w_n\}$  sistema de funciones coordenadas que satisfacen las propiedades establecidas en el Capítulo II, y desde que  $\{w_n\}$  es complete en  $H_A$  la representación-Ritz

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k^n w_k \quad (3.1.2)$$

converge a  $u_0$  para  $n \rightarrow \infty$  en el sentido de la métrica de  $H_A$  (convergencia en la energía) y por tanto en la métrica del primitivo espacio  $H$ , convergencia en la media.-

Supóngase ahora que no solo se quiere una representación aproximada de  $u_0$  sino también de sus derivadas. El problema se hace más crítico desde que la derivación término a término de (3.1.2) conduce a una serie que no necesariamente converge a la derivada correspondiente de  $u_0$  para  $n \rightarrow \infty$ . Un ejemplo simple que a continuación se presenta muestra que la no-convergencia a veces ocurre<sup>(5)</sup>. Considérese, para simplificar, una barra de sección uniforme y de area unitaria compuesta de dos materiales diferentes (Figura 3.1). Supóngase dicha barra some

Figura 3.1.



tida a un cargamento longitudinal  $p(x)$  y fija en los extremos de la misma. Sea el eje  $x$  coincidente con el eje de la barra (Figura 3.1.) Si  $u(x)$  representa el desplazamiento longitudinal de la sección transversal la solución del problema deberá hacer mínimo el funcional:

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{-a}^b \left[ E(x) \left( \frac{du}{dx} \right)^2 - 2p(x) u(x) \right] dx ; \quad -a \leq x \leq b \quad (3.1.3)^{\hat{}}$$

$$\text{para } u(-a) = u(b) = 0 \quad (3.1.4)$$

$$y \quad E(x) = \begin{cases} E_1 & -a \leq x < 0 \\ E_2 & 0 < x \leq b \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Puede demostrarse que si se adopta como función coordenadas a

$$\{w_n\} = \left\{ \text{sen } \frac{n\pi x}{a+b} \right\} \quad (3.1.6)$$

esta secuencia es completa en  $-a \leq x \leq b$  y satisface (3.1.4) por lo que la representación-Ritz

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k^n \text{ sen } \frac{k\pi x}{a+b} \quad (3.1.7)$$

converge a la solución exacta  $u_0$  en la media, igualmente  $u'_n$  converge

<sup>^</sup> La solución del problema debe satisfacer la ecuación diferencial

$$-E(x) u''(x) = p(x), \text{ con las condiciones de contorno } u(-a)=u(b)=0$$

y se vio en el Anexo B que esto equivale a minimizar

a  $u'_0$  en la media (vease nota al pie de la página anterior).

Ahora bien, la deformación específica  $\epsilon(x) = \frac{du}{dx}$  no puede obtenerse por diferenciación de la secuencia (3.1.7). Resulta obvio que la deformación específica longitudinal a izquierda y derecha del origen es diferente, esto es:

$$\epsilon(0^-) \neq \epsilon(0^+) \quad (3.1.8)$$

desde que  $E(x)$  (Módulo de Young) es diferente para los dos materiales y la continuidad del campo de tensiones requiere que en la interface se verifique

$$E_1(x) \epsilon(0^-) = E_2(x) \epsilon(0^+) \quad (3.1.9)$$

(nótese que la anterior es la condición de Weierstrass-Erdmann para

$$J(u) = \int_{-a}^b ( - E(x) u' ' u - 2 p u ) dx$$

tal que  $u(-a)=u(b)=0$

Integrando por parte y recordando las condiciones de contorno resulta

$$J(u) = \int_{-a}^b ( E(x)(u')^2 - 2pu ) dx$$

o lo que es lo mismo

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{-a}^b ( E(x) (u')^2 - 2p u ) dx$$

Es facil ver que en  $H_A$  el producto y norma en la energía son

$$(u,v)_A = \int_{-a}^b E(x) u' v' dx, \quad (u,u)_A = \|u\|_A^2 = \int_{-a}^b E(x)(u')^2 dx$$

Desde que  $H_A$  es completo existe  $\{u_n\}$  tal que  $\|u_0 - u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  y esto implica que  $\|u_0 - u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  y que  $\|u'_0 - u'_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  (convergencia en la media).-

el funcional (3.1.3)).

De (3.1.9) se sigue que

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon(0^+)}{\varepsilon(0^-)} \neq 1 \quad (3.1.10)$$

Desde que  $\{w_n\}$  es continuo en  $x=0$  resulta:

$$\frac{du_n(0^-)}{dx} = \frac{du_n(0^+)}{dx} \quad (3.1.11)$$

para cualquier  $n$ , también la (3.1.11) se verifica para  $n \rightarrow \infty$ , por lo que la derivada de (3.1.7) no converge a la derivada de la solución para  $x = 0+\delta$  y  $x = 0-\delta$  donde  $\delta$  es un número positivo arbitrariamente pequeño. Un hecho similar, relacionado con la propagación de ondas en materiales compuestos, ya fue mostrado por W. Kohn<sup>(27)</sup>.-

Si bien es cierto que en muchos casos la aproximación en el sentido de la convergencia en la energía o en la media es más que suficiente, resulta sin embargo de gran utilidad poder disponer de secuencias minimizantes que puedan representar las discontinuidades que en las derivadas puede exhibir el extremal  $u_0(x)$ .-

W. Kohn<sup>(27)</sup>, E. H. Lee<sup>(28)</sup> han mostrado que agregando términos al funcional (3.1.1) es posible tener representaciones en series que exhiban esas discontinuidades.-

Este tipo de funcionales reciben el nombre de "funcionales relajados" ya que, como se verá en las secciones siguientes, lo que se está haciendo al agregar esos términos al funcional (3.1.1) es relajar las condiciones de Weierstrass-Erdmann para la existencia de extremales con "puntos angulosos" de manera que aparezcan como condiciones

naturales de contorno. Un camino sistemático para la obtención de estos funcionales relajados es uno de los objetivos de las secciones siguientes.-

W. Prager<sup>(29)</sup> y E. Reissnerr<sup>(30)</sup> han examinado el problema de la discontinuidad de los extremales y del relajamiento de las condiciones de contorno pero desde un punto de vista diferente al aquí planteado.-

### §3.2. PROBLEMA DE DIRICHLET, PROBLEMA DE NEWMANN

En esta sección se tratará el problema de valor de contorno<sup>†</sup> del tipo:

$$-\nabla \cdot (g(x,y) \nabla u) + \lambda u = f(x,y) \quad (3.2.1)$$

---

<sup>†</sup> Supóngase una cierta ecuación diferencial:

$$Au = f \quad (a)$$

se supone que la solución de esta ecuación a de ser determinada en una región  $\Omega$  del espacio euclidiano  $m$  dimensional,  $E_m$ , y donde el contorno de esta región se designa con  $C$ . En todo  $C$  o en parte de él, se da el valor de una, o algunas veces de varias, expresión diferencial envolviendo la función desconocida:

$$G_k u \Big|_C = w_k, \quad k=1,2,\dots,l. \quad (b)$$

Las ecuaciones (b) son llamadas "condiciones de contorno" y el problema de integrar la ecuacion diferencial (a) sujeto a las condiciones de contorno (b) se conoce con el nombre de "problema de valor de contorno".-

definida en la región  $\Omega = \{(x,y)\}$  del espacio euclidiano  $E_2$ , para las condiciones homogéneas de contorno:

$$u(x,y) \Big|_C = 0 \quad (3.2.2.a)$$

o

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_C = 0 \quad (3.2.2.b)$$

Donde con  $C$  se indica el contorno que limita  $\Omega$ , con  $n$  la normal saliente a  $C$ , con  $\nabla$  el operador gradiente,  $g(x,y)$  y  $f(x,y)$  son por ahora, funciones continuas en  $\Omega$ , y con  $\lambda = \text{cte.} \gg 0$ .

El problema de valor de contorno (3.2.1)-(3.2.2.a) es conocido con el nombre de Problema de Dirichlet, y a (3.2.1)-(3.2.2.b) con el nombre de Problema de Neumann. Por otra parte estos dos tipos de problemas no solo pueden plantearse en  $E_2$  sino también en  $E_m$ .

Nótese que si se designa con  $C_1$  y  $C_2$  a partes del contorno  $C$  tal que  $C = C_1 + C_2$  se pudo haber planteado el problema (2.2.1) con la condición de contorno

$$u(x,y) \Big|_{C_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{C_2} = 0 \quad (3.2.2.c)$$

Se supone además que  $f \in L_2(\Omega)$  y que  $f$  cumple con las condiciones necesarias para asegurar la existencia de la solución del problema de Dirichlet<sup>†</sup> o del problema de Neumann<sup>††</sup>.

<sup>†</sup> Es suficiente que  $f \in L_2(\Omega)$ , esto es  $\int_{\Omega} f^2 d\Omega < \text{cte.}$

<sup>††</sup> Solo existe solución para el subconjunto de  $L_2(\Omega)$  formado por los elementos  $f$  que satisfacen  $\int_{\Omega} f d\Omega = 0$ .

Como todo problema de valor de contorno, el problema de Dirichlet o el de Newmann o el problema (3.2.1)-(3.2.2.c) generan un operador , que se designará por A. Este operador tiene la forma:

$$Au = -\nabla (g(x,y) \nabla u) + \lambda u \quad (3.2.3)$$

Como dominio de definición podrá tomarse el conjunto de todas las funciones  $C^2(\bar{\Omega})$ , donde con  $\bar{\Omega}$  se designa la región  $\Omega$  incluido el contorno C. Por otra parte A puede considerarse como un operador actuando en  $L_2(\Omega)$ .-

Se demostrará ahora que el operador (3.2.3) es positivo definido en  $L_2(\Omega)$ , para ello bastará demostrar que :

- i) El conjunto  $D(A)$  sea denso en  $L_2(\Omega)$ .
- ii) El operador A es simétrico.
- iii) El operador A es positivo definido, es decir verifica:

$$(Au, u) \geq 0 \text{ y solo nulo para } u=0 \text{ (elemento nulo)}$$

De que es denso en  $L_2(\Omega)$  surge de la misma definición de  $D(A)$ , ya que obviamente  $D(A)$  contiene el conjunto de todas las funciones finitas (cuadrado integrables).-

De que es simétrico se sigue de que si  $u, v \in D(A)$ , esto es:

$$u|_C = v|_C = 0 \quad (3.2.4.a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_C = \frac{\partial v}{\partial n}|_C \quad (3.2.4.b)$$

$$u|_{C_1} = v|_{C_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{C_2} = \frac{\partial v}{\partial n}|_{C_2} = 0 \quad (3.2.4.c)$$



Se tiene que

$$(Au, v) = \int_{\Omega} \nabla (g(x, y) \nabla u) \cdot v \, d\Omega + \int_{\Omega} \lambda uv \, d\Omega \quad (3.2.5)$$

El segundo término del segundo miembro de (3.2.5) es claramente simétrico. Integrando por parte el primer término resulta

$$- \int_{\Omega} \nabla (g(x, y) \nabla u) \cdot v \, d\Omega = \int_{\Omega} g(x, y) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega$$

ya que alguna de las condiciones de contorno (3.2.4) se verifica. Luego la (3.2.5) puede escribirse:

$$(Au, v) = \int_{\Omega} g(x, y) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda uv \, d\Omega \quad (3.2.6)$$

Claramente la (3.2.6) es simétrica.-

Se sigue de (3.2.6) que:

$$(Au, u) \geq 0 \quad (3.2.7)$$

El espacio energía asociado a  $A$ ,  $H_A$ , podrá consistir de aquellas funciones que son:

- i) cuadrado integrables en  $\Omega$ ,
- ii) con derivadas primeras cuadrado integrables en  $\Omega$ .

En el espacio  $H_A$ , el producto energía y la norma energía, están definidos por

$$(u, v)_A = \int_{\Omega} \left[ g(x, y) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \lambda uv \right] d\Omega \quad (3.2.8)$$

$$(u, u)_A = \int_{\Omega} \left[ g(x, y) \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) + \lambda u^2 \right] d\Omega \quad (3.2.9)$$

Luego, como puede verse en el Anexo B, si  $u_0$  es la solución generalizada de (3.2.1) bajo alguna de las condiciones de contorno (3.2.2) minimiza también al funcional cuadrático:

$$J(u) = \int_{\Omega} [g(\nabla u)^2 + \lambda u^2 - 2fu] \, d\Omega \quad (3.2.10)$$

bajo las mismas condiciones de contorno, definido en  $H_A$ . Desde que  $H_A$  es separable se vio en el Anexo B que existe una secuencia  $\{u_n\}$  tal que

$$\|u_0 - u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.2.11)$$

De (3.2.9) y (3.2.11) se sigue que

$$\|u_0 - u_n\|^2 = \int_{\Omega} \left[ g \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{\partial u_n}{\partial y} \right)^2 + \lambda (u_0 - u_n)^2 \right] d\Omega \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.2.12)$$

y desde que todos los términos de (3.2.12) son positivos se sigue

$$\left\| \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial u_n}{\partial x} \right\|^2 = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 d\Omega \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.2.12. a)$$

$$\left\| \frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{\partial u_n}{\partial y} \right\|^2 = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{\partial u_n}{\partial y} \right)^2 d\Omega \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.2.12. b)$$

$$\|u_0 - u_n\|^2 = \int_{\Omega} (u_0 - u_n)^2 d\Omega \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.2.12. c)$$

Lo anterior significa que tanto  $u_n$  como sus derivadas convergen en el sentido de la norma de  $L_2(\Omega)$ .-

Supóngase ahora que  $g(x,y)$  sea seccionalmente continua en  $\Omega$ , luego en este caso el gradiente de  $u_0$  será discontinuo donde lo es  $g(x,y)$ . Sea  $g(x,y)$  discontinuo en  $C_{12}$  (Figura 3.2) curva que divide a  $\Omega$  en las subregiones  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  tal que  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  <sup>†</sup>. Sea  $P$  un punto gene-

---

<sup>†</sup> Debe leerse unión.-

rico sobre  $C_{12}$  y designese con  $P_1$  y  $P_2$  puntos respectivamente de  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  arbitrariamente próximos a  $P$ .

De esta manera  $g(x,y)$  puede definirse como sigue

$$g(x,y) = \begin{cases} g_1(x,y) & (x,y) \in \Omega_1 \\ g_2(x,y) & (x,y) \in \Omega_2 \end{cases}$$

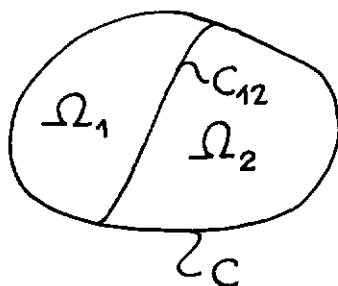
tal que

$$\lim_{P_1 \rightarrow P} g_1(P_1) \neq \lim_{P_2 \rightarrow P} g_2(P_2)$$

El funcional (3.2.10) puede ahora escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} F(u) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} [g_1(\nabla u)^2 + \lambda u^2 - 2fu] d\Omega_1 + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_2} [g_2(\nabla u)^2 + \lambda u^2 - 2fu] d\Omega_2 \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Figura 3.2.



La primera variación de  $F(u)$  será:

$$\begin{aligned} \delta F(u) = & \int_{\Omega_1} (g_1 \nabla u \nabla \delta u + \lambda u \delta u - f \delta u) d\Omega_1 + \\ & + \int_{\Omega_2} (g_2 \nabla u \nabla \delta u + \lambda u \delta u - f \delta u) d\Omega_2 \end{aligned}$$

Haciendo uso de los teoremas de Green:

$$\begin{aligned}
 \delta F(u) = & \int_{\Omega_1} [-\nabla(g_1 \nabla u) + \lambda u - f] d\Omega_1 \delta u + \\
 & + \int_{\Omega_2} [-\nabla(g_2 \nabla u) + \lambda u - f] d\Omega_2 \delta u + \int_{\partial_1 C} g_1 \frac{\partial u}{\partial n} ds \delta u + \\
 & + \int_{\partial_2 C} g_2 \frac{\partial u}{\partial n} ds \delta u + \int_{C_{12}} (g_1 \frac{\partial u}{\partial n} \delta u) ds - \\
 & - \int_{C_{12}} (g_2 \frac{\partial u}{\partial n} \delta u) ds
 \end{aligned}
 \tag{3.2.14}$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno (3.2.2) la (3.2.14) se reduce a

$$\begin{aligned}
 \delta F(u) = & \int_{\Omega} [-\nabla(g \nabla u) + \lambda u - f] d\Omega \delta u + \\
 & + \int_{C_{12}} \left[ (g_1 \frac{\partial u}{\partial n_{P_1 \rightarrow P}}) - (g_2 \frac{\partial u}{\partial n_{P_2 \rightarrow P}}) \right] ds \delta u
 \end{aligned}
 \tag{3.2.15}$$

( con  $\partial_i C$  ( $i=1,2$ ) se indica la parte de  $C$  perteneciente a  $\Omega_i$  )

Desde que el campo de funciones admisibles es continuo  $\lim_{P_1 \rightarrow P} u(P_1) =$

$\lim_{P_2 \rightarrow P} u(P_2)$  que permite reagrupar las dos últimas integrales de (3.2.14) en la última integral de (3.2.15).-

14) en la última integral de (3.2.15).-

Como se vio en el CAPITULO I, la condición necesaria para que  $F(u)$  sea mínimo es que  $\delta F(u) = 0$  y desde que  $\delta u$  es arbitrario el lema fundamental del cálculo de variaciones conduce a:

$$-\nabla(g \nabla u) + \lambda u = f \quad \text{en } \Omega \quad (3.2.16)$$

$$\left[ g_1 \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{P_1 \rightarrow P} - \left[ g_2 \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{P_2 \rightarrow P} = 0 \quad \text{en } C_{12} \quad (3.2.17)$$

La (3.2.16) es claramente la ecuación diferencial (3.2.1), mientras que la (3.2.17) es una ecuación que nos da la relación que debe verificar la discontinuidad de  $\frac{\partial u}{\partial n}$  a lo largo de  $C_{12}$ . La (3.2.17) no es otra cosa que la primera condición de Weierstrass-Erdmann para extremales con puntos angulosos, compárese (3.2.17) con (1.12.9).-

Es necesario recalcar aquí que si el funcional (3.2.10) definido en  $\Omega$  admite un mínimo y  $g(x,y)$  es discontinua sobre  $C_{12}$ , pero continuamente diferenciable las veces necesarias en  $\Omega_i (i=1,2)$ , luego el gradiente de  $u_0(x,y)$ , función extremal, es discontinuo en  $C_{12}$  y tal que la (3.2.17) se verifica en donde con  $\frac{\partial u}{\partial n}$  se indica la derivada respecto a la normal saliente de  $C_{12}$  como perteneciente a la región  $\Omega_i$ . Resulta claro también que las funciones admisibles deben satisfacer (3.2.17) por lo que la elección de las funciones coordenadas es sumamente dificultosa. Sin embargo como se verá en la sección siguiente, es posible eliminar esta dificultad modificando convenientemente el funcional (3.2.10).-

### §3.3. FUNCIONALES RELAJADOS PARA EL PROBLEMA DE DIRICHLET Y NEWMANN. RELAJAMIENTO DE LAS CONDICIONES DE WEIRSTRASS-ERDMANN

Como se indicó en §3.2 cuando  $g(x,y)$  es discontinua en  $C_{ij}$ , cur-

va esta que separa las subregiones  $\Omega_i, \Omega_j \in \Omega$ , en cada una de las cuales  $g(x,y)$  es continuamente diferenciable las veces necesarias. Las funciones admisibles son continuas en  $\Omega$  pero sus gradientes son discontinuos sobre  $C_{ij}$  debiendo verificar la condición de Weierstrass-Erdmann (3.2.17) en  $C_{ij}$ .-

Ahora bien si se desea obtener una solución aproximada del extremo via método de Ritz se deberá adoptar un sistema  $\{w_n\}$  de funciones coordenadas que deben satisfacer las condiciones enumeradas en §2.7., pero que en esta sección solo interesa resaltar una de ellas:

$$\{w_n\} \in H_A \quad (3.3.1)$$

donde  $H_A$  es el espacio energía del operador (3.2.3).-

La (3.3.1) significa entre otras cosas que  $\{w_n\}$  debe satisfacer las condiciones de contorno (3.2.2) y tales que las combinaciones lineales que se pueden formar con (3.3.1) satisfacen la (3.2.17) sobre  $C_{ij}$  a la vez de ser continuas en  $\Omega$  y continuamente diferenciables las veces necesarias en  $\Omega_i$ ; lograr todo esto en  $\{w_n\}$ , como ya se indicó, resulta sumamente dificultoso sino imposible. Surge de esto la conveniencia de trabajar con varios conjuntos de funciones coordenadas uno para cada región, que se designarán con  $\{w_n^i\}$ , pero esto trae el inconveniente adicional de que a lo largo de  $C_{ij}$  las combinaciones lineales que se pueden formar con  $\{w_n^i\}$  y  $\{w_n^j\}$  deben tomar los mismos valores. Si se recuerda el CAPITULO I en lo referente a condiciones naturales de contorno surge como idea para salvar los inconvenientes anteriores la de trabajar con un nuevo funcional,  $J(u)$ , que se obtiene agregando al primitivo funcional,  $F(u)$  nuevos términos de manera que

las condiciones de contorno de  $F(u)$ , incluida la condición de Weirs--trass-Erdmann, sean condiciones naturales de contorno de  $J(u)$ .-

Este proceso se designará con el nombre de "relajamiento del funcional"  $F(u)$ .-

Para los problemas planteados en §3.2. en lugar de trabajar con el funcional (2.3.10) se plantea el siguiente funcional

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ g(\nabla u)^2 + \lambda u^2 - 2uf \right] d\Omega - \frac{1}{2} \int_{C_{12}} \left[ \left( g_1 \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{P_1 \rightarrow P} + \left( g_2 \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{P_2 \rightarrow P} \right] \left[ u(P_1) - u(P_2) \right] ds \quad (3.3.2)$$

con las condiciones de contorno

$$u|_C = 0 \quad (3.3.3.a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_C = 0 \quad (3.3.3.b)$$

$$u|_{C_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{C_2} = 0 \quad (3.3.3.c)$$

donde  $g(x,y)$ ,  $C_{12}$ ,  $C_1$  y  $C_2$  están definidos como en §3.2. La clase de funciones admisibles, siguiendo las ideas planteadas, debe extenderse para incluir funciones discontinuas. Sea  $v(x,y)$  definida como sigue:

$$i) \quad v(x,y) = \begin{cases} v_1(x,y) & \text{para } (x,y) \in \Omega_1 \\ v_2(x,y) & \text{para } (x,y) \in \Omega_2 \end{cases}$$

ii)  $v_1$  y  $v_2$  son funciones continuamente diferenciables las veces necesarias en  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  respectivamente.-

$$iii) \quad v_1|_{P_1 \rightarrow P} \neq v_2|_{P_2 \rightarrow P}$$

iv)  $v|_C = 0$  , para el problema (3.3.2)-(3.3.3.a)

$v|_C \neq 0$  (libre) , para el problema (3.3.2)-(3.3.3.b)

$v|_{C_1} = 0$  y  $v|_{C_2} \neq 0$  (libre), para el problema (3.3.2)-(3.3.3.c)

Luego de i)-iv),  $v(x,y)$  pertenece a la clase de funciones admisibles.

La primera variación de (3.3.2):

$$\begin{aligned} \delta J(u) = & \int_{\Omega} [g \nabla u \nabla(\delta u) + \lambda u \delta u + f \delta u] d\Omega - \int_{C_{12}} \left[ (g_1 \frac{\partial \delta u_1}{\partial n} + g_2 \frac{\partial \delta u_2}{\partial n}) \right. \\ & \left. (u(P_1) - u(P_2)) - (g_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} + g_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}) (\delta u_1 - \delta u_2) \right] ds \quad (3.3.4) \\ & P_{1,2} \rightarrow P \end{aligned}$$

Donde  $u$  está definido de la misma manera que  $v$ . Aplicando Green a (3.

3.4):

$$\begin{aligned} \delta J(u) = & \int_{\Omega} [-\nabla (g \nabla u) + \lambda u - f] \delta u d\Omega - \frac{1}{2} \int_{C_{12}} (g_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} g_2) \\ & (\delta u_1 + \delta u_2) ds - \frac{1}{2} \int_{C_{12}} (g_1 \frac{\partial \delta u_1}{\partial n} + g_2 \frac{\partial \delta u_2}{\partial n}) [u(P_1) - u(P_2)] ds \quad (3.3.5) \\ & P_{1,2} \rightarrow P \quad P_{1,2} \rightarrow P \end{aligned}$$

Desde que las funciones admisibles  $v(x,y)$  son libres en  $C_{12}$ , esto es no hay requerimientos de continuidad de la función ni de sus derivadas en  $C_{12}$ , tanto  $\delta u_i$  como  $\frac{\partial \delta u_i}{\partial n}$  son arbitrarios en (3.3.5). La condición de mínimo de  $J(u)$  conduce a  $\delta J(u) = 0$  y por lo anterior resulta:

$$-\nabla(g \nabla u) + \lambda u = f \quad \text{en } \Omega \quad (3.3.6)$$

$$\left[ g_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - g_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \right] = 0 \quad \text{en } C_{12} \quad (3.3.7)$$

$P_{1,2} \rightarrow P$

$$\left[ u(P_1) - u(P_2) \right] = 0 \quad \text{en } C_{12} \quad (3.3.8)$$

$P_{1,2} \rightarrow P$



La (3.3.6) no es otra cosa que la ecuación diferencial (3.2.1), la (3.3.7) es la primera condición de Weierstrass-Erdmann, y la (3.3.8) implica que  $u(x,y)$  es continua en  $C_{12}$ . Nótese que tanto (3.3.7) y (3.3.8) son condiciones naturales de  $J(u)$ .-

Por otro lado, como se ve claramente de (3.2.17) y (3.3.2), una vez conocida la condición de Weierstrass-Erdmann es fácil deducir los términos a agregar al funcional primitivo para permitir relajar esa condición. Sin embargo este no es el único camino, así por ejemplo el uso de los operadores de Lagrange permite llegar al mismo resultado (3.3.2)<sup>(6)</sup>.-

En este punto es necesario recalcar lo siguiente. El funcional (3.3.2) puede colocarse bajo la forma

$$J(u) = (Au, u) - l(u) + Q(u_1, u_2) = F(u) + Q(u_1, u_2) \quad (3.3.9)$$

Resulta obvio que  $D(F) \subset D(J)$  y que el operador  $Q$  no es necesariamente simétrico positivo definido en  $D(J)$ . Ahora bien, existe un único elemento en  $D(J)$  que minimice  $J(u)$ ?, y si es así éste coincide con el elemento que minimiza  $F(u)$  en  $D(F)$ ?

**TEOREMA 3.3.1.** En  $D(J)$  existe un y solo un elemento  $\tilde{u}_0$  que minimiza  $J(u)$ . Verifícase además que  $\tilde{u}_0$  es idéntico a  $u_0$ , donde  $u_0$  es el elemento que minimiza a  $F(u)$  en  $D(F)$ .-

**Demostración.** Sea  $\tilde{u}_0$  un elemento que minimiza  $J(u)$ , luego:

$$J(\tilde{u}_0) = F(\tilde{u}_0) + Q(\tilde{u}_{01}, \tilde{u}_{02}) = \min. \quad (3.3.10)$$

Desde que  $J(\tilde{u}_0)$  es mínimo se cumplen las condiciones naturales de contorno luego  $Q(\tilde{u}_{01}, \tilde{u}_{02}) = 0$  y  $\tilde{u}_0 \in D(F)$ , por lo que la (3.3.9):

$$J(\tilde{u}_0) = F(\tilde{u}_0) = \min.$$

Por otro lado desde que  $\tilde{u}_0 \in D(F)$ , y desde que en  $D(F)$   $F$  admite un único elemento  $u_0$  que lo minimiza resultará

$$\tilde{u}_0 = u_0$$

La demostración que es único es inmediata. Supóngase  $\tilde{v}_0 \neq \tilde{u}_0$  otro elemento en  $D(J)$  tal que

$$J(\tilde{v}_0) = \min$$

por lo visto anteriormente se tiene

$$\tilde{v}_0 = u_0, \quad \tilde{u}_0 = u_0 \text{ y por hipótesis } \tilde{v}_0 \neq \tilde{u}_0$$

se llega entonces a una contradicción, luego

$$\tilde{v}_0 = \tilde{u}_0 = u_0$$

que es lo que se quería demostrar.-

Desde que  $J(u)$  es minimizado por un único elemento será posible, definirlo en un nuevo espacio Hilbert  $H_J$ , y si se adopta como norma de  $H_J$  la norma de  $H_A$  resulta obvio que  $H_A \subset H_J$ ; ahora bien como  $u_0 \in H_A$  y con el objeto de obtener una representación de  $u_0$  las funciones coordenadas deben satisfacer:

- i)  $\{w_n\} \in H_J$
- ii) para cualquier  $n$   $w_1, w_2, \dots, w_n$  son linealmente independientes
- iii)  $\{w_n\}$  completa en  $H_A$

Resumiendo el mínimo del funcional (3.3.2) puede ser aproximado por secuencias minimizantes discontinuas en  $C_{12}$ . Para la construcción de dichas secuencias se podrá adoptar el conjunto  $\{w_n^1\}, \{w_n^2\}$  de funciones coordenadas definidas en  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  respectivamente tales que las combinaciones lineales que puedan formarse con cada una de ellas no sean

necesariamente continuas en  $C_{12}$ . Al aplicar el método de Ritz las secuencias minimizantes toman la forma:

$$u_n = \begin{cases} \sum_{k=1}^n a_k^n w_k^1 & \text{en } \Omega_1 \\ \sum_{k=1}^n b_k^n w_k^2 & \text{en } \Omega_2 \end{cases} \quad \text{para } n=1,2,\dots \quad (3.3.11)$$

donde los  $a_k^n$  y  $b_k^n$  son evaluados de manera que (3.3.2) sea mínimo, por lo que estos coeficientes hacen que  $u_n$  sea continua en  $C_{12}$  y que su gradiente en  $C_{12}$  satisfaga (3.2.17). La aplicación del método de Ritz al funcional (3.3.2) es mas complejo que cuando se trabaja con el funcional (3.2.10), sin embargo se logran excelentes aproximaciones de la función extremal. Como puede verse en el CAPITULO V la discontinuidad del gradiente en  $C_{12}$  es claramente evidenciada por estas secuencias minimizantes.-

### §3.4. RELAJAMIENTOS DE FUNCIONALES EN LOS QUE INTERVIENEN

#### DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Numerosos problemas de la teoría de la elasticidad (flexión de placas, estado plano de tensiones y deformaciones) conducen a diferentes problemas de valores de contorno en los que entra en juego la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \Delta \Delta u &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \\ &= \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x,y)/D(x,y) \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

actuando en una cierta región  $\Omega$ , limitada por el contorno  $C$ .-

La ecuación (3.4.1) está asociada al problema de mínimo del fun-

cional<sup>(9)</sup>:

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ D \left[ (\Delta u)^2 - 2(1-\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - 2fu \right] d\Omega - \int_C p(s)u \, ds + \int_C m(s) \frac{\partial u}{\partial n} \, ds \quad (3.4.2)$$

La (3.4.2) puede escribirse en forma mas conveniente

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} D(x,y) \left[ (1-\nu)(u_{xx}^2 + u_{yy}^2) + (u_{xx} + u_{yy})^2 + 2(1-\nu) u_{xy}^2 \right] d\Omega - \int_{\Omega} fu \, d\Omega - \int_C p(s) u \, ds + \int_C m(s) \frac{\partial u}{\partial n} \, ds \quad (3.4.3)$$

Desde que para problemas de elasticidad  $D(x,y) \geq 0$  y  $\nu$  coeficiente de Poisson varía entre el valor nulo y 0.5, la primera integral de (3.4.3) es siempre mayor o igual que cero, siendo nula para  $u$  correspondiente al caso de movimientos de cuerpo rígido, como esto no se considera solución resulta que la primera integral es siempre positiva. Por lo anterior el funcional (3.4.3) puede definirse en el espacio Hilbert  $H_A$  constituido por todas las funciones cuadrado integrables con derivadas de segundo orden también cuadrado integrables y donde el producto escalar y norma están definidos como sigue:

$$(Au, v) = \int_{\Omega} D(x,y) \left[ (1-\nu)(u_{xx}v_{xx} + u_{yy}v_{yy}) + (u_{xx} + u_{yy})(v_{xx} + v_{yy}) + 2(1-\nu) u_{xy}v_{xy} \right] d\Omega \quad (3.4.4)$$

$$(Au, u) = \int_{\Omega} D(x,y) \left[ (1-\nu)(u_{xx}^2 + u_{yy}^2) + (u_{xx} + u_{yy})^2 + 2(1-\nu) u_{xy}^2 \right] d\Omega \quad (3.4.5)$$

Luego (3.4.3) definido en  $H_A$  podrá escribirse como:

$$F(u) = |||u|||_A^2 - l(u) \quad (3.4.6)$$

donde  $l(u)$  es un operador lineal de la forma:

$$l(u) = \int_{\Omega} fu \, d\Omega + \int_C p(s) u \, ds - \int_C m(s) \frac{\partial u}{\partial n} \, ds \quad (3.4.7)$$

Sea  $l(u)$  limitado en  $H_A$ , de lo contrario el problema del mínimo de (3.4.6) pierde sentido (vease Anexo B). De acuerdo al teorema de Riesz existe un elemento  $u_0 \in H_A$  tal que

$$l(u) = (u, u_0)_A$$

por lo que la (3.4.6) resulta

$$F(u) = |||u - u_0|||_A^2 - |||u_0|||_A^2 \quad (3.4.8)$$

De (3.4.8) se ve claramente que  $u_0$  minimiza a  $F(u)$  en  $H_A$  y es único (para mas detalles vease Anexo B). Por otro lado desde que  $H_A$  es completo y separable existe una secuencia  $\{u_n\} \in H_A$  tal que:

$$|||u_n - u_0||| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.4.9)$$

De (3.4.5) y (3.4.9) se sigue que:

$$\left\{ \int_{\Omega} (u_{nxx} - u_{0xx})^2 \, d\Omega \right\}^{1/2} = \|u_{nxx} - u_{0xx}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.4.10)$$

$$\left\{ \int_{\Omega} (u_{nyy} - u_{0yy})^2 \, d\Omega \right\}^{1/2} = \|u_{nyy} - u_{0yy}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.4.11)$$

$$\left\{ \int_{\Omega} (u_{nxy} - u_{0xy})^2 \, d\Omega \right\}^{1/2} = \|u_{nxy} - u_{0xy}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.4.12)$$

y recordando la ecuación (17) del Anexo B se sigue

$$\|u_n - u_0\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad (3.4.13)$$

De (3.4.10)-(3.4.13) se sigue que  $\{u_n\}$  converge a  $u_0$  en la métrica de  $L_2(\Omega)$ , esto es convergencia en la media.-

La condición necesaria de mínimo para (3.4.3) es que  $\delta F(u) = 0$ , si se supone que  $D(x,y)$  es continuamente diferenciable en  $\Omega$  y se adoptan los sentidos positivos para  $n$  (normal saliente a  $C$ ) y  $s$  (vector tangente a  $C$ ) indicados por la Figura 3.2. se tendrá

$$\frac{\partial \cdot}{\partial x} = \frac{\partial \cdot}{\partial n} l - \frac{\partial \cdot}{\partial s} m \quad (3.4.14)^{\dagger}$$

donde  $l$  y  $m$  son los cosenos directores de  $n$  respecto a los ejes  $x$  e  $y$  respectivamente.-

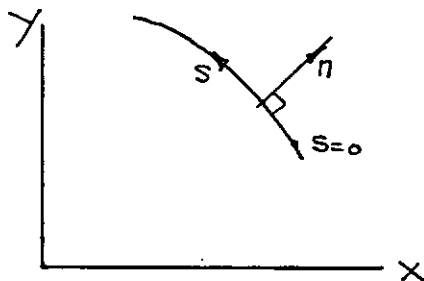


Figura 3.2.

---


$$\dagger \frac{\partial \cdot}{\partial n} = \frac{\partial \cdot}{\partial x} l + \frac{\partial \cdot}{\partial y} m \quad , \text{ m.m. a m. por } l \quad \frac{\partial \cdot}{\partial n} l = \frac{\partial \cdot}{\partial x} l^2 + \frac{\partial \cdot}{\partial y} lm$$

$$\frac{\partial \cdot}{\partial s} = -\frac{\partial \cdot}{\partial x} m + \frac{\partial \cdot}{\partial y} l \quad , \text{ m.m. a m. por } m \quad \frac{\partial \cdot}{\partial s} m = -\frac{\partial \cdot}{\partial x} m^2 + \frac{\partial \cdot}{\partial y} lm$$

---


$$\text{r.m. a m. } \frac{\partial \cdot}{\partial n} l - \frac{\partial \cdot}{\partial s} m = \frac{\partial \cdot}{\partial x}$$

a su vez

$$\begin{aligned}
 \oint_{\Omega} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \delta u d\Omega + \oint_C \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial \delta u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \delta u \right) l ds = \\
 &= \int_{\Omega} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \delta u d\Omega + \oint_C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial n} l - \frac{\partial \delta u}{\partial s} m \right) l ds - \\
 &\quad - \oint_C \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \delta u l ds
 \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

Integrando por parte la expresión:

$$\int_C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} m l \frac{\partial \delta u}{\partial s} ds = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} m l \delta u \Big|_C - \int_C \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} l m \right) \delta u ds$$

pero el primer término del segundo miembro es nulo desde que se está integrando en un contorno cerrado. Luego la (3.4.15) resulta:

$$\begin{aligned}
 \oint_{\Omega} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \delta u d\Omega + \oint_C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} l^2 \frac{\partial \delta u}{\partial n} ds + \\
 &\quad + \oint_C \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} l m \right) - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} l \right] \delta u ds
 \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

Transformando en manera similar los otros términos de (3.4.3) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \oint_{\Omega} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \delta u d\Omega + \oint_C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} m^2 \frac{\partial \delta u}{\partial n} ds + \\
 &\quad - \oint_C \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} l m \right) + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} m \right] \delta u ds
 \end{aligned} \tag{3.4.17}$$

$$\begin{aligned} \delta \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} d\Omega &= 2 \int_{\Omega} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \delta u d\Omega + \int_C \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} l^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} m^2 \right) \frac{\partial \delta u}{\partial n} ds - \\ &- \int_C \left\{ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} m + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} l + \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) lm \right] \right\} \delta u ds \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

$$\begin{aligned} \delta \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \delta u d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} lm \frac{\partial \delta u}{\partial n} ds + \\ &+ \frac{1}{2} \int_C \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} (m^2 - l^2) \right] - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} m \right\} \delta u ds \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

Mediante el uso de (3.4.16) a (3.4.19) se tiene:

$$\begin{aligned} \delta F(u) &= \int_{\Omega} (D \Delta u - f) \delta u d\Omega + \int_C [D M(u) + m(s)] \frac{\partial \delta u}{\partial n} ds - \\ &- \int_C [D Q(u) + p(s)] \delta u ds = 0 \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

donde

$$M(u) = \frac{\partial}{\partial n} \Delta u + (1-\nu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} l^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} lm + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} m^2 \right) \quad (3.4.21)$$

$$Q(u) = \frac{\partial}{\partial n} \Delta u + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) nl + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} (l^2 - n^2) \right] \quad (3.4.22)$$

De (3.4.20) se sigue que si  $\delta u$  y  $\frac{\partial \delta u}{\partial n}$  son arbitrarios en C:

$$D(x,y) \Delta \Delta u - f = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (3.4.23)$$

$$D(x,y) M(u) + m(s) = 0 \quad \text{en } C \quad (3.4.24)$$

$$D(x,y) Q(u) + p(s) = 0 \quad \text{en } C \quad (3.4.25)$$

La (3.4.23) es la ecuación diferencial planteada y las (3.4.24), (3.4



.25) son las condiciones naturales de contorno para el funcional  $F(u)$  (3.4.3).-

Ahora bien si  $D(x,y)$  fuera discontinuo a lo largo de la curva  $C_{12}$  que separa la región  $\Omega$  en dos subregiones  $\Omega_1, \Omega_2$  podrá definirse de la siguiente manera:

$$D(x,y) = \begin{cases} D_1(x,y) & \text{para } (x,y) \in \Omega_1 \\ D_2(x,y) & \text{para } (x,y) \in \Omega_2 \end{cases}$$

y tal que

$$\lim_{P_1 \rightarrow P} D_1(P_1) \neq \lim_{P_2 \rightarrow P} D_2(P_2)$$

donde  $P_1, P_2$ , y  $P$  tienen el mismo significado que en §3.2.-

De (3.4.20) se sigue facilmente que la condición de Weierstrass-Erdmann toma la forma:

$$D_1 M(u_1) - D_2 M(u_2) = 0 \quad \text{en } C_{12} \quad (3.4.26.a)$$

$$P_1 \rightarrow P \quad P_2 \rightarrow P$$

$$D_1 Q(u_1) - D_2 Q(u_2) = 0 \quad \text{en } C_{12} \quad (3.4.26.b)$$

$$P_1 \rightarrow P \quad P_2 \rightarrow P$$

Conocidas estas últimas expresiones el relajamiento del funcional (3.4.3) resulta inmediato; como es facil ver los términos a agregar son:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & -\frac{1}{2} \int_{C_{12}} \left[ D_1 M(u_1) + D_2 M(u_2) \right] \left( \frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) ds \\ & \quad \quad \quad P_{1,2} \rightarrow P \quad P_{1,2} \rightarrow P \\ \text{ii)} \quad & \frac{1}{2} \int_{C_{12}} \left[ D_1 Q(u_1) + D_2 Q(u_2) \right] \left[ u(P_1) - u(P_2) \right] ds \\ & \quad \quad \quad P_{1,2} \rightarrow P \quad P_{1,2} \rightarrow P \end{aligned}$$

por lo que el funcional relajado toma la forma:

$$\begin{aligned}
 J(u) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} D \left\{ (1-\nu) (u_{xx}^2 + u_{yy}^2) + (u_{xx} + u_{yy})^2 + 2(1-\nu) u_{xy}^2 \right\} d\Omega - \\
 & - \int_{\Omega} f u \, d\Omega - \int_C p(s) u \, ds + \int_C m(s) \frac{\partial u}{\partial n} \, ds - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{C_{12}} \left[ D_1 M(u_1) + D_2 M(u_2) \right] \left( \frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} \right) ds + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{C_{12}} \left[ D_1 Q(u_1) + D_2 Q(u_2) \right] \left[ u(P_1) - u(P_2) \right] ds \quad (3.4.27)
 \end{aligned}$$

donde el campo de funciones admisibles se ha extendido con el objeto de incluir funciones discontinuas, esto es:

- i)  $u(x,y) = \begin{cases} u_1(x,y) & \text{para } (x,y) \in \Omega_1 \\ u_2(x,y) & \text{para } (x,y) \in \Omega_2 \end{cases}$
- ii)  $u_1$  y  $u_2$  son funciones continuamente diferenciables las veces necesarias en  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$
- iii)  $u_1(P_1)_{P_1 \rightarrow P} \neq u_2(P_2)_{P_2 \rightarrow P}$

La condición de mínimo de  $J(u)$  conduce a las siguientes condiciones naturales de contorno:

$$D M(u) + m(s) = 0 \quad \text{en } C \quad (3.4.28.a)$$

$$D Q(u) + p(s) = 0 \quad \text{en } C \quad (3.4.28.b)$$

$$u_1 - u_2 = 0 \quad \text{en } C_{12} \quad (3.4.28.c)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \quad \text{en } C_{12} \quad (3.4.28.d)$$

$$D_1 M(u_1) - D_2 M(u_2) = 0 \quad \text{en } C_{12} \quad (3.4.28.e)$$

$$P_{1,2} \rightarrow P$$

$$D_1 Q(u_1) - D_2 Q(u_2) = 0 \quad \text{en } C_{12} \quad (3.4.28.f)$$

$$P_{1,2} \rightarrow P$$

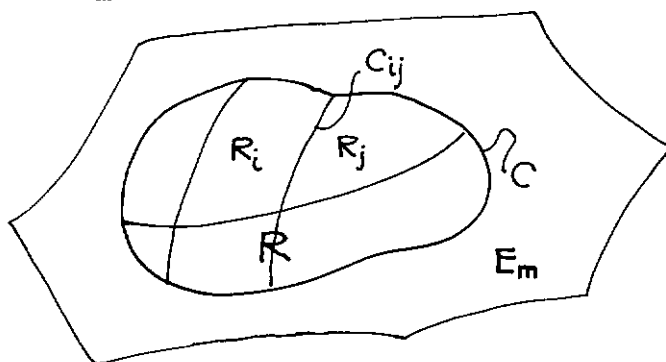
Nuevamente las consideraciones planteadas al final de §3.3. son en un todo aplicables en esta sección.-

## C A P I T U L O   I V .   M A P E A M I E N T O

### §4.1. CONSIDERACIONES GENERALES

Sea  $F(u)$  un funcional actuando en una cierta región  $R$  del espacio euclidiano  $m$  dimensional  $E_m$ , con  $C$  se designará al contorno de  $R$  que limita esta región en  $E_m$  (Figura 4.1).-

Figura 4.1



Como se indicó en el CAPITULO III si  $F(u)$  admite extremales con discontinuidades en sus derivadas, resulta conveniente dividir la región  $R$  en subregiones  $R_i$  interconectadas a travez de los contornos  $C_{ij}$  donde el extremal presenta derivadas discontinuas.-

Por otro lado de los Capítulos II y III se deduce que los coeficientes de la matriz-Ritz se calculan a travez de integrales sobre  $R_i$  e integrales a lo largo de  $C$  y  $C_{ij}$ . Con el objeto de sistematizar el cálculo de estas integrales a la vez que permitir, dentro de un mismo problema, abordar con generalidad cualquier forma de contorno y cualquier condición de contorno se recurre aquí a lo que se convendrá en llamar "mapeamiento", que en pocas palabras puede definirse como el proceso que consiste en establecer una correspondencia entre elementos de la subregión  $R_i$  de  $E_m$  y elementos de la región  $Q_i$ , también de

$E_m$  tal que la región  $Q_i$  sea de forma conveniente, en este trabajo de forma cuadrada.-

#### §4.2. REPRESENTACION DISCRETA DE LA REGION R <sup>†</sup>

Sea  $R$  una región en  $E_m$ , limitada por el contorno  $C$  y subdividida en  $M$  subregiones  $R_i$  (Figura 4.1). La construcción de una representación discreta de  $R$  es como sigue:

- i) Sea  $L$  un número finito de puntos en  $R$ , estos puntos se designarán "puntos nodales globales" o "nodos globales" y se designarán por  $X^1, X^2, \dots, X^L$  o bien mas brevemente por  $X^\Delta (\Delta=1, 2, \dots, L)$ , sea además  $\bar{R}_X = \{X^1, X^2, \dots, X^L\}$ .-
- ii) La región  $R$  es representada aproximadamente por otra región  $\bar{R}$  que contiene por lo menos todos los puntos nodales globales de  $R$ . La diferencia entre  $R$  y  $\bar{R}$  ( $R - \bar{R}$ ) se designará como  $R_e$ , error en la representación  $\bar{R}$  con respecto a  $R$ . Si  $R_e$  es vacío ( esto es no contiene ningún elemento ) luego  $\bar{R}$  y  $R$  resultan una misma cosa , resulta obvio que  $\bar{R}_X \subset \bar{R}$ .-

---

<sup>†</sup> Esta sección está basada en las ideas que primeramente fueron aplicadas por I. B. Ergatoudis en su tesis de M. Sc., "Quadrilateral Element in Plane Analysis" University of Wales Swansea 1966, por I. B. Ergatoudis<sup>(41)</sup> y formalmente presentadas por J. T. Oden en "Finite Elements of Nonlinear Continua", 1971, obra esta que se toma como base para la realización de esta sección.-

iii) Sea  $M$  un número finito de subregiones  $R_r$  en que se ha dividido  $R$  y por analogía con elementos finitos se convendrá en llamar "regiones finitas", se espera que el ensamblaje de estas regiones finitas conduzca a  $\bar{R}$ . Se supone que cada región finita está limitada y que no hay posibilidad de superposición de contornos es to es

$$R_i \cap R_j = 0 \text{ (elemento nulo)} \quad (4.2.1)^{\hat{\hat{}}}$$

La unión

$$R^* = \bigcup_{r=1}^M R_r \quad (4.2.2)$$

se designará como región desconectada o desamblada.-

iv) Sea un elemento genérico  $R_r$  completamente aislado. Un número finito  $N_r$  de puntos en  $R_r$  es ahora identificado respectivamente como  $x_{(r)}^1, x_{(r)}^2, \dots, x_{(r)}^{N_r}$  o mas brevemente por  $x_{(r)}^N$  ( $N=1,2,\dots, N_r$ ) <sup>$\hat{\hat{}}$</sup>  y que se denominarán "puntos nodales locales" o "nodos locales". El conjunto finito de nodos locales correspondientes a la región finita  $R_r$  se designará por  $R_{x(r)}^*$ .-

v) Ahora bien las regiones finitas  $R_r$  no están relacionadas con  $\bar{R}$ . La construcción del modelo discreto de  $R$  es establecida mediante el mapeamiento de  $R^*$  en  $\bar{R}$  o de cada  $R_{x(r)}^*$  en  $\bar{R}_X$ . Por razones obvias este mapeamiento se convendrá en llamar "ensamblaje de elementos", desde que transforma la región no ensamblada  $R^*$  en la

$\hat{\hat{}}$   $\cap$  indica intersección.-

$\hat{\hat{\hat{}}}$  Claramente tanto para  $X$  como  $x_{(r)}^N$  puede asociarse respectivamente el conjunto ordenado de números reales  $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$  y  $\{x_{1(r)}^N, x_{2(r)}^N, \dots, x_{m(r)}^N\}$  llamados coordenadas del punto  $X^{\wedge}$  y  $x_{(r)}^N$

región ensamblada  $\bar{R}$ . Asumiendo, por el momento, que la correspondencia existe entre los nodos de una región finita  $R_r$  y aquellos de  $\bar{R}$ , la conectividad es establecida por el mapeamiento  $V : R_{x(r)}^* \rightarrow \bar{R}_X$  para un  $r$  fijo por :

$$X^\Delta = \sum_N^r x_{(r)}^N \quad (4.2.3)$$

donde el índice repetido  $N$  indica suma para  $N=1,2,\dots,N_r$  y donde  $V_N^r$  está definido como sigue

$$V_N^r = \begin{cases} 1 & \text{si el nudo } \Delta \text{ de } \bar{R} \text{ coincide con el nudo } N \text{ de } R_r \\ 0 & \text{lo contrario} \end{cases}$$

Desde que la identificación de puntos en  $\bar{R}$  y  $R_{x(r)}$  como puntos nodales es completamente arbitrario la correspondencia establecida en (4.2.3) existe para todo punto de  $\bar{R}$  y  $R^*$  por lo que la (4.2.3) implica el mapeamiento de  $R^*$  en  $\bar{R}$ .

#### §4.3. MAPEAMIENTO DE LA SUBREGION $R_r$

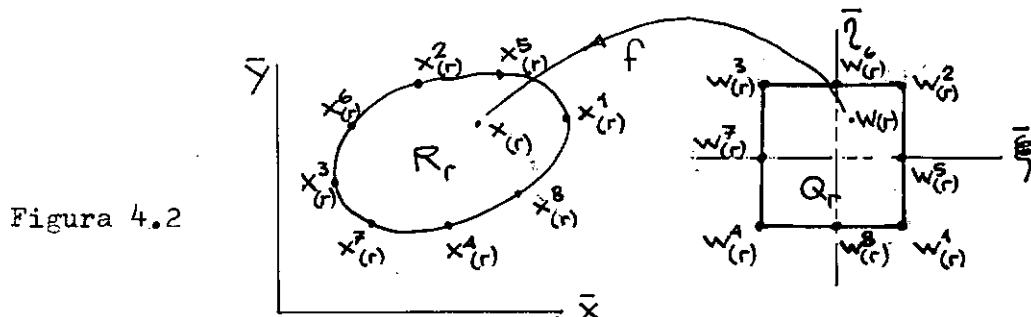
Como se indicó en §4.1. interesa trabajar en subregiones de forma simple por lo que surge la necesidad de mapear  $R_r$ .

Para simplificar la presentación sea  $R_r \subset E_2$ . Designese con  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  los ejes cartesianos en  $E_2$  al cual están referidos los puntos de  $R_r$ . Por otro lado designese con  $\xi$  y  $\eta$  otro sistema cartesiano de ejes en  $E_2$  al cual están referidos los puntos de otra región  $Q_r \subset E_2$ . En el presente trabajo se supone que  $Q_r$  es una región cuadrada, esto es  $-1 \leq \xi \leq 1$  y  $-1 \leq \eta \leq 1$ . Notese sin embargo que la elección de la forma de  $Q_r$  puede ser cualquiera y ella está estrechamente vinculada al tipo de funcio-

nes coordenadas que se adopten al aplicar el método de Ritz.-

Sea  $x_{(r)}$  y  $w_{(r)}$  un punto arbitrario de  $R_r$  y  $Q_r$  respectivamente, se supone existe una transformación tal que (Figura 4.2):

$$x_{(r)} = f(\xi, \eta) \quad , \quad w_{(r)} = f^{-1}(x, y) \quad (4.3.1)$$



Una construcción aproximada de (4.3.1) puede hacerse como sigue

- i) Adoptese sobre el contorno de  $R_r$  y  $Q_r$   $N_r$  puntos nodales, que se designarán por  $x_{(r)}^N$  y  $w_{(r)}^N$  ( $N=1,2,\dots,N_r$ ) respectivamente (Figura 4.2).
- ii) Sea la siguiente transformación

$$x_{(r)} = L_N(\xi, \eta) x_{(r)}^N \quad (4.3.2)$$

donde el índice  $N$  indica sumación para  $N=1,2,\dots,N_r$ . Es fácil ver de (4.3.2) que si se designa con  $\xi^{Ni}, \eta^{Ni}$  las coordenadas del punto nodal  $w_{(r)}^{Ni}$  las funciones  $L_N(\xi, \eta)$ , conocidas con el nombre de "funciones de interpolación", cumplen con :

$$L_N(\xi^{Ni}, \eta^{Ni}) = \begin{cases} 1 & \text{para } N = N_i \\ 0 & \text{para } N \neq N_i \end{cases} \quad (4.3.3)$$



Por otro lado obsérvese que (4.3.2) es general, esto es, es válida para cualquier  $R_r$ , por lo que las funciones de interpolación son las mismas para todas las subregiones. Si a su vez se exige que en el contorno de  $C_{ij}$ , común a  $R_i$  y  $R_j$  respectivamente, se adopten los mismos puntos nodales la representación aproximada de  $C_{ij}$  es única por lo que la condición de no superposición de regiones finitas de §4.2. queda satisfecha con la transformación (4.3.2). De esto se deduce también que al hacer el ensamblaje de las regiones  $R_r$  para obtener  $\bar{R}$ , el error  $R_e$  se produce solo debido a que  $C$  es solo logrado en forma aproximada y tal que  $R_e \rightarrow 0$  para  $N_r \rightarrow \infty$ . Es interesante recalcar aquí que el aumento de puntos nodales sobre el contorno de  $R_r$  no trae aparejado un aumento en el número de ecuaciones que surgen al aplicar el método de Ritz. Esta es una de las diferencias entre este tipo de "regiones finitas" y los "elementos isoparametricos" (26,38,39,40,41).-

Para fijar ideas supongase  $N_r=8$  y distribuidos los puntos nodales como indica la Figura 4.2, luego las funciones de interpolación resultan:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= 0.25 (1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\
 L_2 &= 0.25 (1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\
 L_3 &= 0.25 (1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \\
 L_4 &= 0.25 (1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \\
 L_5 &= 0.5 (1+\xi)(1-\eta^2) \\
 L_6 &= 0.5(1-\xi^2)(1+\eta) \\
 L_7 &= 0.5 (1-\xi)(1-\eta^2) \\
 L_8 &= 0.5 (1-\xi^2)(1-\eta)
 \end{aligned}$$

Para  $N_r$  mayores las funciones de interpolación  $L_N$  pueden encontrarse en los numerosos trabajos que sobre elementos isoparamétricos se han publicado hasta el presente.-

#### §4.4. EVALUACION DE LOS COEFICIENTES DE LA MATRIZ-RITZ

##### MEDIANTE INTEGRACION NUMERICA

En esta sección se presenta brevemente el uso de las fórmulas para integración por el método de Gauss. Un estudio sistemático de éste y de otros métodos para integración numérica, incluyendo la evaluación del error cometido por cada uno de ellos puede verse en la extraordinaria obra de V. I. Krylov, "Approximate Calculation of Integrals".-

Como se vio en los CAPITULOS II, III y Anexo B en el cálculo de los coeficientes de la matriz-Ritz estan involucradas integrales del tipo:

$$\int_{R_i} f(x,y) \, dx \, dy \quad (4.4.1)$$

$$\int_{C_{ij}} g(x,y) \, dx \quad \text{o} \quad \int_{C_{ij}} g(x,y) \, dy \quad (4.4.2)$$

a su vez de (4.3.2) se tiene:

$$x_{(i)} = L_N(\xi, \eta) x_{(i)}^N \quad (4.4.3)$$

$$y_{(i)} = L_N(\xi, \eta) y_{(i)}^N \quad (4.4.4)$$

donde  $L_N$  indica la función de interpolación,  $x_{(i)}^N$  e  $y_{(i)}^N$  indican las coordenadas del punto nodal N sobre el contorno de la subregión  $R_i$  y con  $x_{(i)}$  e  $y_{(i)}$  las coordenadas de un punto genérico de  $R_i$ .-

De las dos últimas expresiones y eliminando el subíndice  $i$  se tiene:

$$dx = \frac{\partial L_N}{\partial \xi} x^N d\xi + \frac{\partial L_N}{\partial \eta} x^N d\eta \quad (4.4.5)$$

$$dy = \frac{\partial L_N}{\partial \xi} y^N d\xi + \frac{\partial L_N}{\partial \eta} y^N d\eta \quad (4.4.6)$$

Si se introduce la siguiente matriz, que se convendrá en llamar "matriz Jacobiana":

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial \xi} & \frac{\partial L_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial L_{N_r}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial L_1}{\partial \eta} & \frac{\partial L_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial L_{N_r}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(i)} & y^{(i)} \\ \vdots & \vdots \\ x^{N_r(i)} & y^{N_r(i)} \end{bmatrix} \quad (4.4.7)$$

A su vez se conoce con el nombre de Jacobiano al determinante de la matriz anterior, se lo designará por  $J(\frac{x,y}{\xi,\eta})$ ; el Jacobiano juega un papel importante en el cambio de variables, en efecto se tiene que<sup>(12)</sup>

$$dx dy = J(\frac{x,y}{\xi,\eta}) d\xi d\eta$$

por lo que la (4.4.1) resulta

$$\int_{R_i} f(x,y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{f}(\xi,\eta) d\xi d\eta \quad (4.4.8)$$

y de una manera similar la (4.4.2) se transforma en alguna de las siguientes integrales:

$$\int_{-1}^1 \bar{g}(\xi, \bar{\eta}) d\xi \quad \text{o} \quad \int_{-1}^1 \bar{g}(\bar{\xi}, \eta) d\eta \quad (4.4.9)$$

según sea el contorno en que se está, con  $\bar{\xi}$  o  $\bar{\eta}$  se quiere indicar un

valor fijo de  $\xi$  o  $\eta$  respectivamente.-

Sobre las integrales (4.4.8) y (4.4.9) puede aplicarse las fórmulas de integración de Gauss:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \quad (4.4.10)$$

donde (4.4.10) es exacto si  $f(x)$  es un polinomio de grado  $2n-1$ .

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x,y) dx dy = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n A_i^{(n)} A_k^{(n)} f(x_i^{(n)}, y_k^{(n)}) \quad (4.4.11)$$

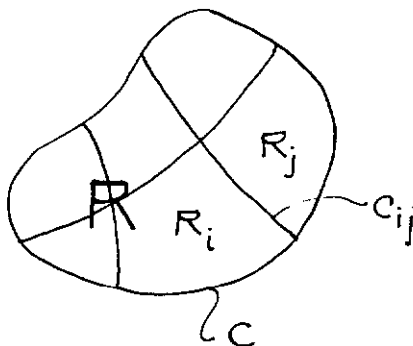
Los coeficientes  $A_k^{(n)}$  y las coordenadas son simétricos respecto al origen  $x = 0$  y  $y = 0$ . En el Apendice A de la obra de V. I. Krylov, anteriormente nombrada puede encontrarse los valores de  $A_k^{(n)}$  y  $x_k^{(n)}$  para valores de  $n$  de hasta  $n = 48$ .-

C A P I T U L O V.    FUNCIONAL RELAJADO PARA EL CASO ESPECIFICO  
DE TORSION EN BARRAS. APLICACIONES NUMERI-  
CAS.

§5.1. FUNCIONAL RELAJADO PARA PROBLEMAS DE TORSION

Considérese una barra de longitud finita, de sección simplemente conexa y de forma cualquiera, constituida por diferentes materiales perfectamente elásticos como es mostrado en la figura 5.1, en donde  $R$  es la sección transversal de la barra,  $C$  el contorno de la misma y  $R_i$ ,  $R_j, \dots$  etc. cada una de las subregiones de  $R$  en las cuales las propiedades del material se consideran continuas.-

Figura 5.1



Supóngase dicha barra sujeta en ambos extremos a momentos torsores según la teoría de Saint-Venant. Sea  $u(x,y)$  la "función de tensión o la función de tensión de Prandtl". Las tensiones de corte y el momento torsor en términos de  $u(x,y)$  están dados respectivamente por las siguientes expresiones<sup>(6,11,19,22,33,36)</sup>:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.1.1)$$

$$\mathcal{E}_{yz} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.1.2)$$

$$M_t = 2 \int_R u(x,y) \, dx \, dy \quad (5.1.3)$$

Puede demostrarse<sup>(6,19,22,33,36)</sup> que cuando se introduce la función de tensión  $u(x,y)$  el problema de la torsión se reduce a resolver la ecuación diferencial:

$$-\nabla^2 (\nabla u) = 2 G \Theta$$

bajo la condición de contorno  $u|_C = 0$ . Si  $u_0(x,y)$  es la solución del problema anterior, minimiza a un funcional similar al (3.2.10) en el que  $\lambda=0$ ,  $g(x,y)$  es la inversa de  $G(x,y)$ , "módulo de elasticidad tangencial o módulo de rigidez", y  $f(x,y)$  es el ángulo específico de rotación de la sección que se designa por  $\Theta$ , bajo la misma condición de contorno, esto es

$$u(x,y)|_C = 0 \quad (5.1.4)$$

Luego el problema planteado está encuadrado en lo que se llamó "Problema de Dirichlet".-

Si se supone  $G(x,y)$  discontinua en  $C_{ij}$  (Figura 5.1) el gradiente de  $u_0(x,y)$  será discontinuo sobre esos contornos a la vez que deberá verificar la condición de Weierstrass-Erdmann (3.2.17); lo anterior equivale a decir que  $\mathcal{E}_{xz}$  y  $\mathcal{E}_{yz}$  son discontinuas sobre  $C_{ij}$ .-

Se vio en el CAPITULO III que, con el objeto de obtener una solución aproximada via método de Ritz, resultaba conveniente trabajar con lo que se llamó "funcionales relajados", luego de (3.3.2) el funcio-

nal relajado para el problema planteado será:

$$F(u) = \sum_{i=1}^N \int_{R_i} \left\{ \frac{1}{2 G_i(x,y)} (\nabla u)^2 - 2 \theta u \right\} dx dy - \\ - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{C_{ij}} \frac{1}{2 G_i(x,y)} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial n} (\bar{u}_i - \bar{u}_j) ds_{ij} \quad (5.1.5)$$

con la condición de contorno

$$u(x,y) \Big|_C = 0 \quad (5.1.6)$$

en donde N es el número de subregiones  $R_i$  en que se ha dividido R, y con  $\bar{u}_i$  se indica:

$$\lim_{P_1 \rightarrow P} u_i(P_1) \quad , \text{ para } P_1 \in R_i \text{ y } P \in C_{ij}$$

Si se desea relajar la condición de contorno (5.1.6) es fácil ver, siguiendo la teoría planteada en el CAPITULO III, que el término a agregar a (5.1.5) es:

$$- \int_C \frac{1}{G(x,y)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \bar{u} ds \quad (5.1.7)$$

agregando (5.1.7) a (5.1.5) se tiene el nuevo funcional:

$$J(u) = \sum_{i=1}^N \int_{R_i} \left\{ \frac{1}{2 G_i(x,y)} (\nabla u)^2 - 2 \theta u \right\} dx dy - \\ - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{C_{ij}} \frac{1}{2 G_i(x,y)} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial n} (\bar{u}_i - \bar{u}_j) ds_{ij} - \\ - \sum_{i=1}^N \int_{\partial_i C} \frac{1}{G_i(x,y)} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial n} \bar{u}_i ds \quad (5.1.8)$$

donde con  $\partial_i C$  se indica la parte de  $C$  perteneciente al contorno de  $R_i$ . De (3.3.7), (3.3.8) y (5.1.7) se sigue que las condiciones naturales de contorno correspondientes al funcional (5.1.8) son:

$$u_i \Big|_{\partial_i C} = 0 \quad \text{para } i=1,2,\dots,N \quad (5.1.9)$$

$$\frac{1}{G_i} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial n} - \frac{1}{G_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial n} = 0 \quad \text{en } C_{ij} \quad (i,j=1,\dots,N) \quad (5.1.10)$$

$$\left[ u_i(P_1) - u_j(P_2) \right]_{P_{1,2} \rightarrow P} = 0 \quad \text{en } C_{ij} \quad (i,j=1,\dots,N) \quad (5.1.11)$$

de lo anterior y según se vio en §3.3 el campo de funciones admisibles para el funcional (5.1.8) será:

- i)  $v(x,y) = v_i(x,y)$  para  $(x,y) \in R_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ )
- ii)  $v_i(x,y)$  es una función continuamente diferenciable las veces necesarias en  $R_i$
- iii)  $v_i \Big|_{P_1 \rightarrow P} \neq v_j \Big|_{P_2 \rightarrow P}$  en  $C_{ij}$
- iv)  $v_i \Big|_{\partial_i C} \neq 0$  (libre)

## §5.2. APLICACION DEL METODO DE RITZ

Siguiendo la teoría planteada en el CAPITULO III, para la aplicación del método de Ritz al funcional  $J(u)$ , (5.1.8), se adoptan conjuntos  $\{w_n^i\}$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) de funciones coordinadas que satisfacen las condiciones listadas en §3.3 :



- i)  $\{w_n^i\} \in H_J \quad (i=1,2,\dots,N)$   
 ii) Para cualquier  $n$   $w_1^i, w_2^i, \dots, w_n^i$  son linealmente independientes  
 iii)  $\{w_n^i\}$  completa en  $H_A$  ( $i=1,2,\dots,N$ )  
 donde  $H_J$  y  $H_A$  tienen el mismo significado que en §3.3.

Si se supone que  $\{w_n^i\}$  es de la forma:

$$\{w_{nm}^i\} = \{f_n(x) h_m^i(y)\} \quad (5.2.1)$$

es decir se adoptó en todas las subregiones  $R_i$  el mismo conjunto de funciones coordenadas, la representación-Ritz toma la forma:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_j} a_{kj}^{n(i)} f_k(x) h_j(y) \quad \text{en } R_i \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (5.2.2)$$

y en donde  $n = n_k \times n_j$ .-

Los coeficientes-Ritz se calculan resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial J(u_n)}{\partial a_{rt}^{(i)}} = 0 \quad (r=1,\dots,n_k; t=1,\dots,n_j; i=1,\dots,N) \quad (5.2.3)$$

que en forma desarrollada y luego de agrupar términos toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(u_n)}{\partial a_{rt}^{(i)}} &= \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_j} a_{kj}^{(i)} \left\{ \int_{R_i} \frac{1}{G_i(x,y)} (f_{xk} f_{xr} h_j h_t + f_k f_r h_{yj} h_{yt}) dx dy + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq i}}^N \left[ - \int_{C_{iq}} \frac{1}{2G_i(x,y)} (f_{xk} f_r + f_{xr} f_k) h_j h_t dy + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots\dots\dots + \int_{C_{iq}} \frac{1}{2G_i(x,y)} f_r f_k (h_{yt} h_j + h_{yj} h_t) dx \Big] - \\
& - \int_{\partial_i C_i} \frac{1}{G_i(x,y)} (f_{xr} f_k + f_{xk} f_r) h_t h_j dy + \int_{\partial_i C_i} \frac{1}{G_i(x,y)} f_r f_k (h_{yt} h_j + h_{yj} h_t) dx \Big\} + \\
& + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq i}}^N \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_j} a_{kj}^{(q)} \left\{ \int_{C_{iq}} \frac{1}{2} \left[ \frac{f_{xr} f_k}{G_i(x,y)} - \frac{f_{xk} f_r}{G_q(x,y)} \right] h_t h_j dy - \right. \\
& \quad \left. - \int_{C_{iq}} \frac{1}{2} \left[ \frac{h_{yt} h_j}{G_i(x,y)} - \frac{h_{yj} h_t}{G_q(x,y)} \right] f_k f_r dx \right\} -
\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

$$- 2 \oint_{R_i} f_r h_t dx dy = 0 \quad (r=1, \dots, n_k; t=1, \dots, n_j; i=1, \dots, N)$$

Si se supone ahora que:

$$f_k(x) = x^k, \quad h_j(y) = y^j \tag{5.2.5}$$

sustituyendo lo anterior en (5.2.4) se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J(u_n)}{\partial a_{rt}^{(i)}} &= \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_j} a_{kj}^{(i)} \left\{ \int_{R_i} \frac{1}{G_i(x,y)} \left[ k r x^{(k+r-2)} y^{(j+t)} + j t x^{(k+r)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. y^{(j+t-2)} \right] dx dy + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq i}}^N \left[ - \int_{C_{iq}} \frac{k+r}{2G_i(x,y)} x^{(k+r-1)} y^{(j+t)} dy + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{C_{iq}} \frac{j+t}{2G_i(x,y)} x^{(k+r)} y^{(j+t-1)} dx \right] - \right. \\
&\quad \left. - \int_{\partial_i C_i} \frac{k+r}{G_i(x,y)} x^{(k+r-1)} y^{(j+t)} dy + \int_{\partial_i C_i} \frac{j+t}{G_i(x,y)} x^{(k+r)} y^{(j+t-1)} dx \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq i}}^N \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_j} a_{kj} \int_{C_{iq}} \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{r}{G_i} - \frac{k}{G_q} \right) x^{(k+r-1)} y^{(j+t)} dy \right. \\
& \quad \left. - \left( \frac{t}{G_i} - \frac{j}{G_q} \right) x^{(k+r)} y^{(j+t-1)} dx \right] \\
& - 2 \oint_{R_i} x^r y^t dx dy = 0 \quad (r=1, \dots, n_k; t=1, \dots, n_j; i=1, \dots, N) \quad (5.2.6)
\end{aligned}$$

Es necesario recalcar aquí que el sistema de ecuaciones algebraicas, (5.2.4) o (5.2.6) es un sistema lineal cuya matriz, matriz-Ritz, tiene la característica de ser simétrica, bandeda, y con determinante diferente de cero. Por otra parte como ya se mostró en §3.3 desde que  $J(u)$  es completamente general la elección del espacio de funciones admisibles, y por tanto de las funciones coordenadas, reducirá a  $J(u)$  al funcional correspondiente a ese espacio. En otras palabras:

- i) Si el espacio de funciones admisibles es tal que  $u(x,y)$  es continuamente diferenciable en  $R$ , esto es se supone que  $G(x,y)$  es continua en  $R$ , y tal que  $u|_C = 0$  resultará en (5.1.8) la segunda y tercera integral nulas por lo que:

$$J(u) = \int_R \left\{ \frac{1}{2G} (\nabla u)^2 - 2 \Theta u \right\} dx dy$$

- ii) Si el espacio de funciones admisibles es tal que  $u(x,y)$  es continuamente diferenciable en  $R$ ,  $u|_C \neq 0$  (libre), en (5.1.8) el segundo término es nulo por lo que  $J(u)$  se reduce a:



y en donde la numeración de los puntos nodales es la indicada en la Figura 4.2.-

A continuación se presenta una serie de ejemplos numéricos comparandose los resultados, en los casos que fue posible, con las soluciones exactas extraídas de las obras de S. Timoshenko<sup>(19)</sup>, A. E. H. Love<sup>(22)</sup>, N. I. Muskhelishvili<sup>(17)</sup> y B. Filonenko<sup>(36)</sup>.-

### Ejemplo 1.

Sea la sección rectangular de la Figura 5.2, se supone  $G(x,y)$  constante en R y se adopta una única región finita para representar R. El sistema de funciones coordenadas es:

$$\{w_n\} = \{(1-\xi^2)(1-\eta^2) \xi^m \eta^n\} \quad (5.3.1)$$

notese que se está trabajando en el dominio mapeado, y que  $u|_C=0$ . En este caso se puede demostrar, vease Anexo E, que el coeficiente de rigidez torsional de la sección calculado al aplicar el método de Ritz, es una cota inferior de la solución exacta.-

En Tabla 5.1 y Tabla 5.2 se presentan los coeficientes-Ritz para  $n=4, 9$ , y  $16$  y los valores de  $u(x,y)$ ,  $\epsilon_{xz}$ , y  $\epsilon_{yz}$  en algunos puntos característicos comparandose con la solución exacta.-

Figura 5.2

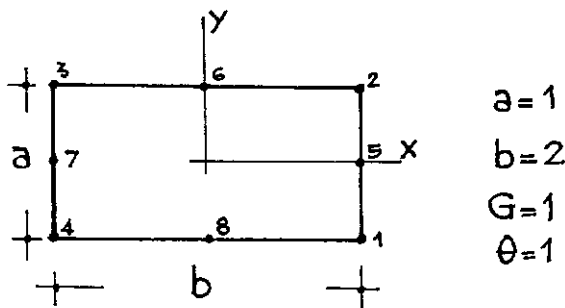


TABLA 5.1. COEFICIENTES-RITZ

n	4	9	16	n	4	9	16
$a_{00}^n$	0.2266	0.2277	0.2277	$a_{04}^n$		0.0011	-0.0005
$a_{20}^n$	0.1349	0.1190	0.1174	$a_{24}^n$		-0.0433	-0.0018
$a_{40}^n$		0.0248	0.0317	$a_{44}^n$		0.1131	0.0002
$a_{60}^n$			-0.0070	$a_{64}^n$			0.0515
$a_{02}^n$	0.0009	0.0054	0.0052	$a_{06}^n$			-0.0007
$a_{22}^n$	0.0833	0.0214	0.0291	$a_{26}^n$			0.0374
$a_{42}^n$		0.0862	0.0474	$a_{46}^n$			-0.2187
$a_{62}^n$			0.0452	$a_{66}^n$			0.2707

TABLA 5.2.

n	$u(0,0)$	error en %	$\epsilon_{min}$	error en %	$\epsilon_{max}$	error en %	$C_n$	error en %
4	0.2266	0.5	0.723	0.4	0.910	2.2	0.4571	0.2
9	0.2277	0.	0.743	2.3	0.937	0.7	0.4573	0.15
16	0.2277	0.	0.740	1.9	0.927	0.3	0.4574	0.13
	0.2277		0.726		0.930		0.4580	Sol.Exacta

( $C_n$  es el "coeficiente de rigidez torsional" de la sección transversal de la barra)

Ejemplo 2.

La misma sección que la del Ejemplo 1, pero la representación de R es mediante cuatro subregiones (Figura 5.3). Se adoptó el siguiente grupo de funciones coordenadas:

$$\{w_{nm}\} = \{x^n y^m\}$$

Figura 5.3

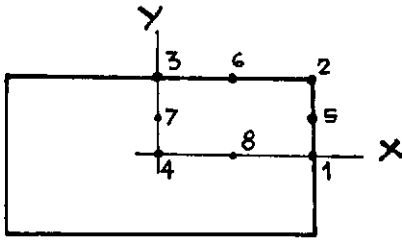


TABLA 5.3. VALORES DE LA FUNCION DE TENSION

n	4	error %	9	error %	16	error %	Sol.Exacta
$u^n(1)$	-0.2667		0.0229		0.0040		0.
$u^n(2)$	-0.0484		-0.0154		-0.0001		0.
$u^n(3)$	0.0060		-0.0022		0.0011		0.
$u^n(4)$	0.3333	2.4	0.2300	1.	0.2306	1.3	0.2277
$u^n(5)$	-0.2121		-0.0187		-0.0003		0.
$u^n(6)$	-0.0075		0.0024		-0.0022		0.
$u^n(7)$	0.2515	43.	0.1665	5.	0.1743	0.5	0.1752
$u^n(8)$	0.1833	5.6	0.1915	1.4	0.1920	1.1	0.1942

TABLA 5.4. TENSIONES DE CORTE Y RIGIDEZ TORSIONAL

n	4	error %	9	error %	16	error %	Sol.Exacta
$\tau_{yz}^{(1)}$	1.200	65.	0.555	23.	0.733	0.96	0.726
$\tau_{xz}^{(3)}$	-1.309	40.	-0.813	12.	-0.914	1.70	-0.930
$\tau_{xz}^{(7)}$	-0.655	45.	-0.494	9.3	-0.457	1.1	-0.452
$C_n$	0.3393	26.	0.4548	0.55	0.4572	0.17	0.4580

Notese que  $C_n$  converge por valores menores que el exacto.

De §2.7 se sigue que  $\frac{|u_o - u_{16}|}{|u_o|} < \frac{|||u_o - u_{16}|||}{|||u_o|||} = 4.15 \%$

Como se ve el error real esta muy por debajo de ese límite.





TABLA 5.6.

n	u(0,0)	error %	$\bar{u}_{yz}(5)$	error %	C <sub>n</sub>	error %
0.625	6.5	1.250	7.5	2,2222	1.2	
0.589	0.35	1.344	0.52	2,2489	0.03	
0.589	"	1.355	0.29	2,2492	0.02	
0.589	"	1.348	0.22	2,2493	0.01	
0.857		1.351		2,2496	Sol.Exacta	

Nótese en la TABLA 5.5 la simetría de los coeficientes-Ritz.-

Ejemplo 4.

La misma sección que la del Ejemplo 3, pero para funciones coordenadas similares a las del Ejemplo 2. Se presentan resultados para caso A, B y C Figura 5.5.a, b, c.-

Figura 5.5.a

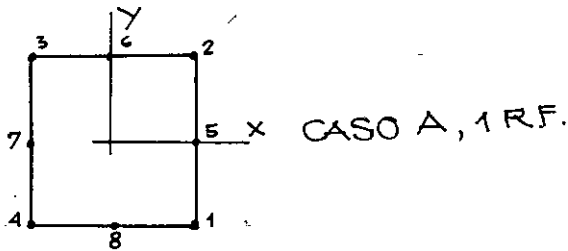


Figura 5.5.b

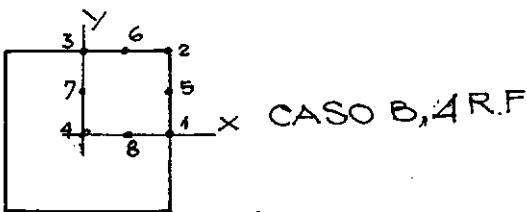


Figura 5.5.c

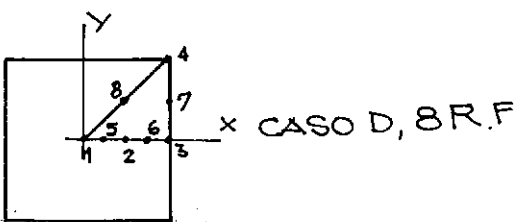


TABLA 5.7

n	Caso	u(o,o)	error %	$\epsilon_{\max}$	error %	$C_n$	error %
4	A	0.683	16.	1.500	11.	2.1333	5.2
	B	0.683	16.	1.500	11.	2.1333	5.2
	C	0.659	12.	1.449	11.	2.1872	2.8
9	A	0.591	0.7	1.320	2.3	2.2480	0.7
	B	0.590	0.5	1.320	2.3	2.2480	0.7
	C	0.590	0.5	1.339	0.9	2.2490	0.27
16	A	0.592	0.8	1.334	1.5	2.2484	0.5
	B	0.592	0.8	1.332	1.5	2.2489	0.3
	C	0.588	0.2	1.355	0.3	2.2492	0.2
25	A <sup>†</sup>	0.511	††	1.667	††	2.3364	††
	A	0.588	0.2	1.358	0.5	2.2493	0.13
	B <sup>†</sup>	0.532	††	1.768	††	2.4099	††
		0.587		1.351		2.2496	Sol.Exacta

† Integración inexacta de los coeficientes de la matriz-Ritz y del término independiente de (5.2.4)

†† Vease §2.7

Desde que  $G(x,y)$  y  $\Theta$  se adoptaron igual a la unidad resulta

$$\|u_0 - u_{16}\| < 0.02 \quad (\text{caso C})$$

De la desigualdad de Schuartz-Bunyakovski se sigue que

$$|u_0 - u_{16}| < \|u_0 - u_{16}\| < 0.02$$

Para el punto de coordenadas  $X=0, y=0$  se tiene:

$$|u_0(o,o) - u_{16}(o,o)| = 0.001$$

Esto es el error real es muy inferior al límite establecido anteriormente.-

Ejemplo 5.

Se analiza en este ejemplo una sección circular de radio unitario. La representación de la sección se hace con una única región finita como lo indica la Figura 5.6.-

TABLA 5.8. COEFICIENTES RITZ

n	4	9	16	n	4	9	16
$a_{00}^n$	0.4974	0.4946	0.4936	$a_{04}^n$		0.0085	-0.0126
$a_{20}^n$	-0.5101	-0.5079	-0.4962	$a_{24}^n$		-0.2464	-0.0107
$a_{40}^n$		0.0086	-0.0128	$a_{44}^n$		0.5154	0.2389
$a_{60}^n$			0.0098	$a_{64}^n$			0.0131
$a_{02}^n$	-0.5101	-0.5079	-0.4962	$a_{06}^n$			0.0097
$a_{22}^n$	0.0411	0.1566	0.0199	$a_{26}^n$			-0.0934
$a_{42}^n$		-0.2464	-0.0084	$a_{46}^n$			0.0163
$a_{62}^n$			-0.0944	$a_{66}^n$			0.0305

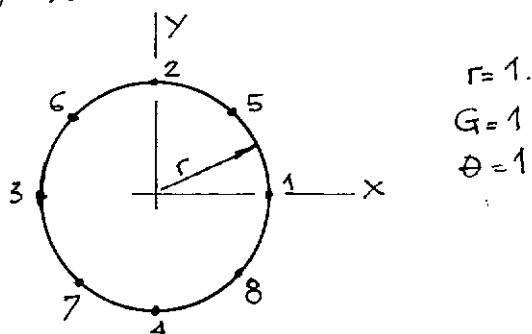
La función de tensión para el caso de  $n=4$  estará dada por:

$$\frac{u_4}{G\theta} = 0.4974 - 0.5101 (x^2 + y^2) + 0.0411 x^2 y^2 - \frac{1}{2} \left[ 0.9948 - 1.0202 (x^2 + y^2) \right] + 0.0411 x^2 y^2.$$

Comparese esto con la solución exacta dada por S. Timoshenko<sup>(19)</sup>:

$$\frac{u_0}{G\theta} = \frac{1}{2} (1 - x^2 - y^2).$$

Figura 5.6



Como se ve con solo cuatro términos la solución es alcanzada, nótese que  $|x| < 1$  e  $|y| < 1$  por lo que el término en  $x^2 y^2$  tiene poca importancia frente a los otros. Sin embargo desde que la representación aproximada de  $R$  es tal que  $R_\epsilon$  es del orden del 2% de  $R$  los coeficientes de la matriz-Ritz como los terminos independientes de (5.2.4) son calculados en forma inexacta y se verifica que la representación-Ritz no se ve mejorada para  $n$  creciente.-

Lo anterior puede verse claramente en la TABLA 5.9.-

TABLA 5.9

n	$u_n(0,0)$	e. %	$\hat{e}_{yz}^{(1)}$	e. %	$\hat{e}_{xz}^{(2)}$	e. %	$\hat{e}_{yz}^{(2)}$	e. %	$C_n$	e. %
4	0.4974	0.5	1.020	2.	-0.692	2.1	0.692	2.1	1.5339	2.3
9	0.4946	1.1	0.981	1.9	-0.675	4.5	0.675	4.5	1.5336	2.4
16	0.4936	1.3	0.985	1.5	-0.677	4.2	0.677	4.2	1.5336	2.4
	0.5000		1.000		-0.707		0.707		1.5707	Sol.Exacta

Ejemplo 6.

Con el objeto de mejorar la solución anterioro se divide la sección en cuatro subregiones como lo indica la figura 5.7.-

Figura 5.7

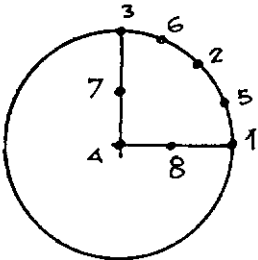


TABLA 5.10 COEFICIENTES-RITZ

n	4	9	16	n	4	9	16
$a_{00}^n$	0.4996	0.4996	0.4996	$a_{04}^n$		-0.0008	-0.0003
$a_{20}^n$	-0.5000	-0.4994	-0.4996	$a_{24}^n$		0.0173	0.0002
$a_{40}^n$		-0.0008	-0.0002	$a_{44}^n$		-0.0359	-0.0153
$a_{60}^n$			-0.0003	$a_{64}^n$			-0.0011
$a_{02}^n$	-0.5000	-0.4994	-0.4996	$a_{06}^n$			-0.0002
$a_{22}^n$	0.0000	-0.0098	-0.0012	$a_{26}^n$			0.0085
$a_{42}^n$		-0.0173	-0.0005	$a_{46}^n$			-0.0021
$a_{62}^n$			0.0088	$a_{66}^n$			-0.0019

Puede observarse que la solución exacta para la función de tensión es alcanzada en todos los casos ( $n=4, 9, 16$ ) así por ejemplo, para  $n=4$ :

$$\frac{u_4}{G \theta} = \frac{1}{2} ( 0.9992 - x^2 - y^2 )$$

para  $n=16$  se tiene:

$$\frac{u_{16}}{G \theta} = \frac{1}{2} 0.9992 ( 1 - x^2 - y^2 ) + \text{términos despreciables}$$

TABLA 5.11

n	$u_n(0,0)$	$\epsilon_{yz}^{(1)}$	$\epsilon_{xz}^{(2)}$	$\epsilon_{xz}^{(5)}$	$\epsilon_{yz}^{(5)}$	$C_n$
4	0.4996	1.000	-0.707	-0.383	0.924	1.5685
9	0.4996	1.002	-0.709	-0.382	0.922	1.5685
16	0.4996	1.002	-0.709	-0.382	0.922	1.5685
	0.5000	1.000	-0.707	-0.383	0.924	1.5708 Sol. Exacta

Ejemplo 7.

Sección triangular equilátera, Figura 5.7.-

Figura 5.7

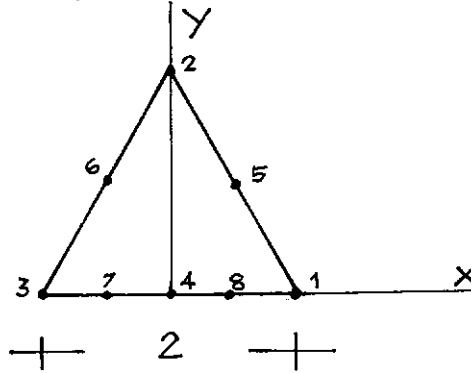


TABLA 5.12 COEFICIENTES-RITZ

n	9	16	25	n	9	16	25
$a_{00}^n$	-0.0059	0.0000	-0.0005	$a_{03}^n$		0.2886	0.2752
$a_{10}^n$	0.0000	-0.0000	0.0000	$a_{13}^n$		0.0006	0.0002
$a_{20}^n$	-0.1459	0.0000	0.0026	$a_{23}^n$		0.0001	0.0601
$a_{30}^n$		-0.0000	-0.0000	$a_{33}^n$		-0.0027	-0.0007
$a_{40}^n$			-0.0019	$a_{43}^n$			-0.1042
$a_{01}^n$	1.2007	0.8660	0.8680	$a_{04}^n$			0.0061
$a_{11}^n$	0.0000	0.0006	-0.0000	$a_{14}^n$			-0.0000
$a_{21}^n$	-2.7132	-0.8660	-0.8918	$a_{24}^n$			-0.0493
$a_{31}^n$		-0.0014	-0.0000	$a_{34}^n$			0.0003
$a_{41}^n$			0.0362	$a_{44}^n$			0.1262
$a_{02}^n$	-0.9375	-0.9999	-0.9945				
$a_{12}^n$	-0.0000	-0.0013	-0.0001				
$a_{22}^n$	2.4751	-0.0001	0.0157				
$a_{32}^n$		0.0044	0.0004				
$a_{42}^n$			-0.0473				

La distribución de las tensiones de corte  $\tau_{xz}$  a lo largo del eje  $y$ , está dada por S. Timoshenko<sup>(19)</sup> y para el caso particular del ejemplo toma la forma:

$$\frac{\tau_{xz}}{G \theta} = 0.8660 - 2 y + 0.8660 y^2$$

Si se toma la representación-Ritz para  $n=16$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xz}}{G \theta} &= 0.8660 - (2 \times 0.9999) y + (3 \times 0.2886) y^2 = \\ &= 0.8660 - 2 y + 0.8658 y^2 \end{aligned}$$

Es decir que la solución exacta es alcanzada con solo 16 términos del sistema de funciones coordenadas  $\{w_{mn}\} = \{x^m y^n\}$  .-

TABLA 5.13 VALORES DE  $u(x,y)$  EN EL CONTORNO

n	9	16	25	n	9	16	25
$u_n(1)$	-0.15196	-0.00004	0.00011	$u_n(5)$	0.17089	0.00001	0.00069
$u_n(2)$	-0.73892	-0.00006	0.00468	$u_n(6)$	0.17088	0.00000	0.00070
$u_n(3)$	-0.15198	0.00005	-0.00056	$u_n(7)$	-0.04248	0.00000	-0.00002
$u_n(4)$	-0.00597	0.00000	0.00013	$u_n(8)$	-0.04247	-0.00000	-0.00000

Como puede apreciarse los valores en el contorno son para  $N=16,25$  practicamente nulos.-

TABLA 5.14

n	$\tau_{xz}^{(4)}$	e. %	$\tau_{xz}^{(5)}$	e. %	$\tau_{yz}^{(5)}$	e. %	$C_n$	e. %
9	1.200	38.	-0.030		0.639	15.	0.41577	20.
16	0.866	0.	-0.433	0.	0.750	0.	0.34641	0.
25	0.868	0.02	-0.431	0.5	0.748	0.25	0.34642	0.
	0.866		-0.433		0.750		0.34641	Sol. Exacta

Ejemplo 8.

En el presente ejemplo se analiza una sección rectangular constituida por dos materiales diferentes, Figura 5.8, y cuya solución exacta puede encontrarse en N. I. Muskhelishvili<sup>(17)</sup>.-

Este problema es analizado de dos maneras diferentes:

- i) Mediante funciones coordenadas del tipo trigonométrico.-
- ii) Mediante funciones coordenadas del tipo  $\{x^m y^n\}$ .-
- i) Las funciones coordenadas son

$$\left\{ \sin \frac{m}{c} (y - c) \sin \frac{n}{a + b} (x + a) \right\} \quad \text{en } R_1$$

$$\left\{ \sin \frac{m}{c} (y - c) \sin \frac{n}{a + b} (b - x) \right\} \quad \text{en } R_2$$

Nótese por tanto que se adoptan funciones coordenadas diferentes para cada subregión. Al aplicar el método de Ritz se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

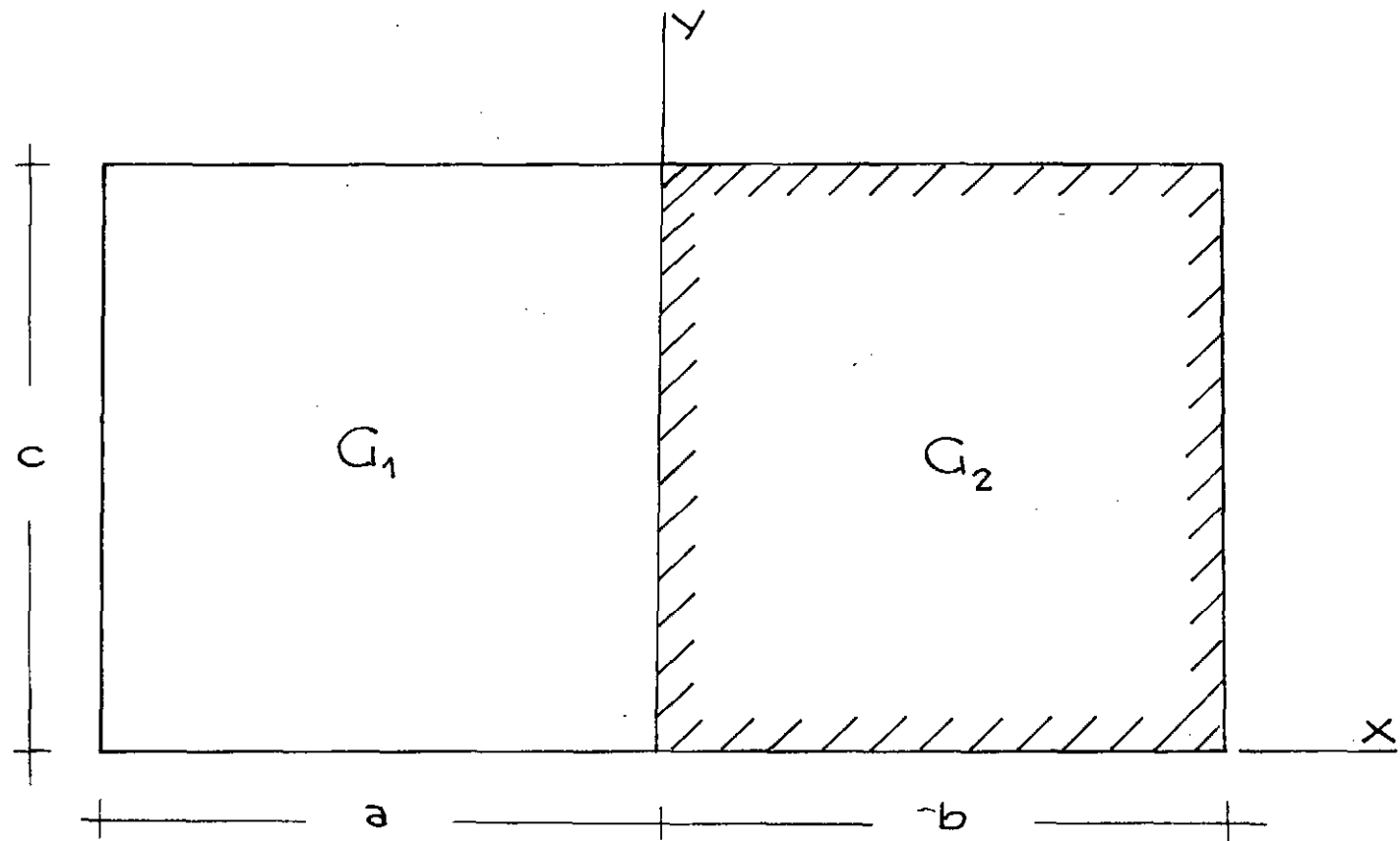
$$C_{jk} a_{kr}^{(1)} + D_{jk} a_{kr}^{(2)} = S_{jr} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n_{j,k})$$

$$E_{jk} a_{kr}^{(1)} + D_{jk} a_{kr}^{(2)} = T_{jr} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n_{j,k})$$

para un valor fijo de  $r$ , y donde  $n = n_j \cdot n_k$  es el número de elementos del sistema de funciones coordenadas que se adopta para la representación-Ritz:

$$\frac{u(x,y)}{G_2 \Theta a^2} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n_j} \sum_{k=1}^{n_k} a_{jk}^{(1)} \sin \frac{j}{c} (y - c) \sin \frac{k}{a + b} (x + a) & \text{en } R_1 \\ \sum_{j=1}^{n_j} \sum_{k=1}^{n_k} a_{jk}^{(2)} \sin \frac{j}{c} (y - c) \sin \frac{k}{a + b} (b - x) & \text{en } R_2 \end{cases}$$





$$\alpha = \frac{c}{a+b} \quad ; \quad \beta = \frac{b}{a} \quad ; \quad \gamma = \frac{G_1}{G_2}$$

Figura 5.8

A su vez:

$$C_{jk} = jk\pi^2 H_{jk}^{(1)} + \frac{\gamma^2 \pi^2}{\alpha^2} H_{jk}^{(2)} - j\pi \cos \frac{j\pi}{1+\beta} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{1+\beta} - \\ - k\pi \operatorname{sen} \frac{j\pi}{1+\beta} \cos \frac{k\pi}{1+\beta}$$

$$D_{jk} = j\pi \cos \frac{j\pi}{1+\beta} \operatorname{sen} \frac{k\pi\beta}{1+\beta} + k\pi \operatorname{sen} \frac{j\pi}{1+\beta} \cos \frac{k\pi\beta}{1+\beta}$$

$$E_{jk} = j\pi \cos \frac{j\pi\beta}{1+\beta} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{1+\beta} + \frac{k\pi}{\gamma} \operatorname{sen} \frac{j\pi\beta}{1+\beta} \cos \frac{k\pi}{1+\beta}$$

$$F_{jk} = jk\pi^2 L_{jk}^{(1)} + \frac{\gamma^2 \pi^2}{\alpha^2} L_{jk}^{(2)} - j\pi \cos \frac{j\pi\beta}{1+\beta} \operatorname{sen} \frac{k\pi\beta}{1+\beta} - \\ - k\pi \operatorname{sen} \frac{j\pi\beta}{1+\beta} \cos \frac{k\pi\beta}{1+\beta}$$

$$S_{jr} = \begin{cases} 0 & \text{para } r \text{ par} \\ -16 \gamma \frac{(1+\beta)^2}{jr\pi^2} \left(1 - \cos \frac{j\pi}{1+\beta}\right) & \text{para } r \text{ impar} \end{cases}$$

$$T_{jr} = \begin{cases} 0 & \text{para } r \text{ par} \\ -16 \frac{(1+\beta)^2}{jr\pi^2} \left(1 - \cos \frac{j\pi\beta}{1+\beta}\right) & \text{para } r \text{ impar} \end{cases}$$

donde:

$$H_{jk}^{(1),(2)} = \begin{cases} \frac{1}{1+\beta} & \text{para } k = j \\ \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi(k-j)}{1+\beta}}{\pi(k-j)} + \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi(k+j)}{1+\beta}}{\pi(k+j)} & \text{para } k \neq j \end{cases}$$

$$L_{jk}^{(1),(2)} = \begin{cases} \frac{\beta}{1+\beta} & \text{para } k = j \\ \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi(k-j)\beta}{1+\beta}}{\pi(k-j)} + \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi(k+j)\beta}{1+\beta}}{\pi(k+j)} & \text{para } k \neq j \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{c}{a+b}, \quad \beta = \frac{b}{a}, \quad \gamma = \frac{G_1}{G_2}$$

Para una sección no homogénea con  $\alpha=0.5$ ,  $\beta=1.0$  y  $\gamma=10.0$  la función de tensión y la tensión de corte para  $x=0$  son mostradas en las figuras 5.9, 5.10, y 5.11. La solución usando el método de Ritz para  $n=16$  y la solución mediante el "método de elementos finitos"<sup>(38)</sup>, con 200 elementos en la mitad de la sección, pueden considerarse equivalentes.-

La discontinuidad en la primera derivada de la función de tensión a lo largo del eje  $x$ , es claramente exhibida en la Figura 5.10. La diferencia entre los valores que la función de tensión toma a izquierda y derecha de  $x=0$  (Figura 5.12) muestra que para  $n=16$  el máximo error es menor al 2%, para  $n=36$  la diferencia es prácticamente nula.-

La rigidez torsional para algunos valores de  $\gamma$ , y  $\beta$  es comparada con la solución exacta dada por N. I. Muskhelishvili<sup>(17)</sup>. Para los casos examinados, y para  $n=16$  el error es menor al 2%. (Figura 5.13)

ii) En este caso se adoptan como funciones coordenadas a:

$$\{w_{mn}\} = \{x^m y^n\}$$

La representación aproximada de la sección se logra mediante 4 regiones finitas como es mostrado en la Figura 5.14.-

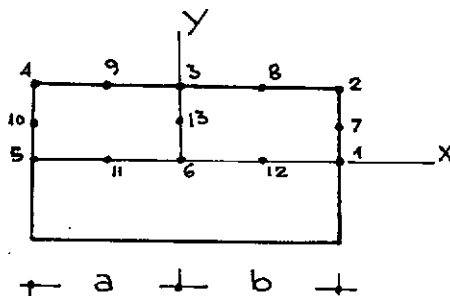


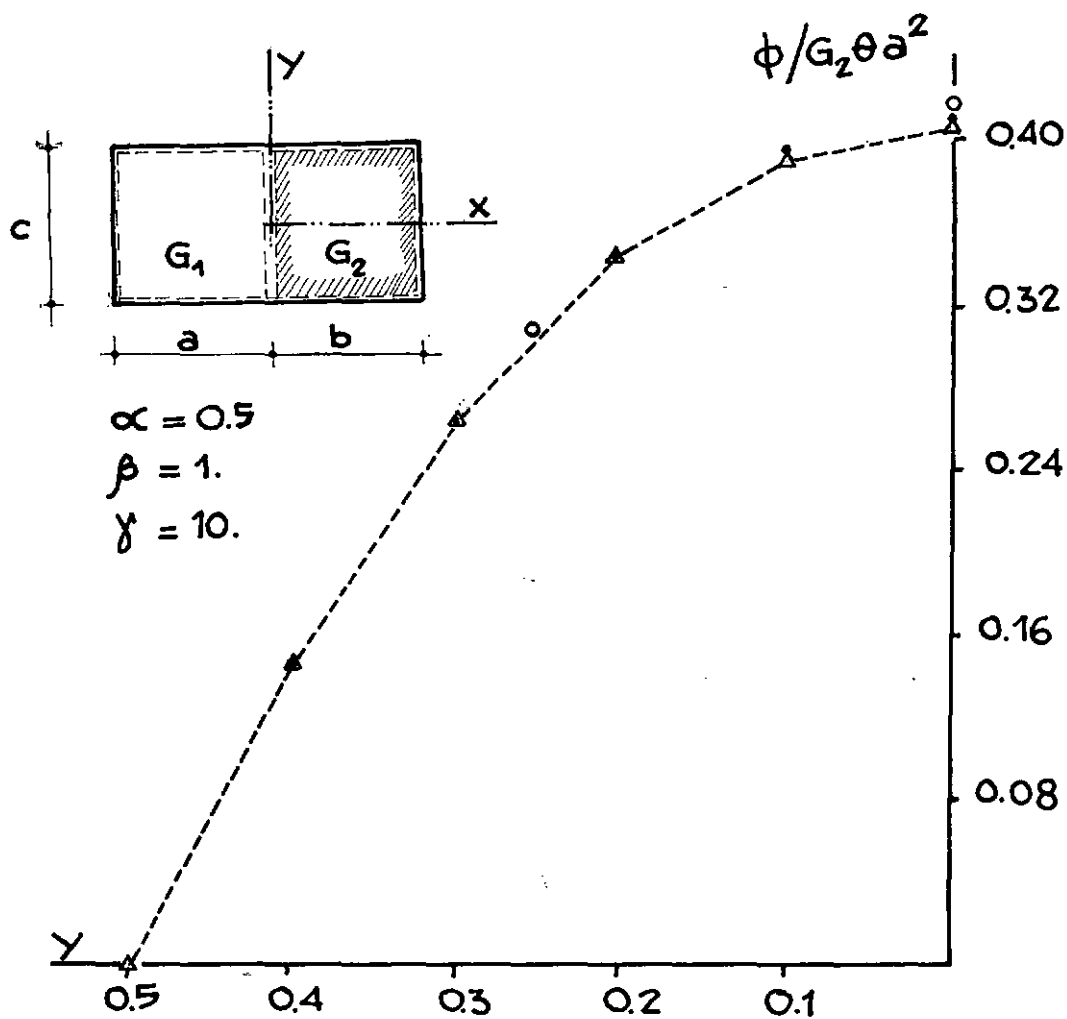
Figura 5.14

Por lo anterior se sigue que la representación-Ritz toma la forma:

$$\frac{u_n(x,y)}{G_2\Theta^2} = \sum_{k=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_j} a_{kj}^{n(i)} x^k y^j \quad \text{en } R_i \quad (i=1,2,3,4)$$

donde  $n=n_k \cdot n_j$ .-

Resultados para  $n_k=7$  y  $n_j=4$ , esto es  $n=28$ , son presentados en las mismas figuras que para el caso i).-



---△---

ELEMENTOS FINITOS

- 16 TERMINOS SERIE TRIGONOMETRICA
- 28 TERMINOS SERIE ALGEBRAICA

FIGURA 5.9

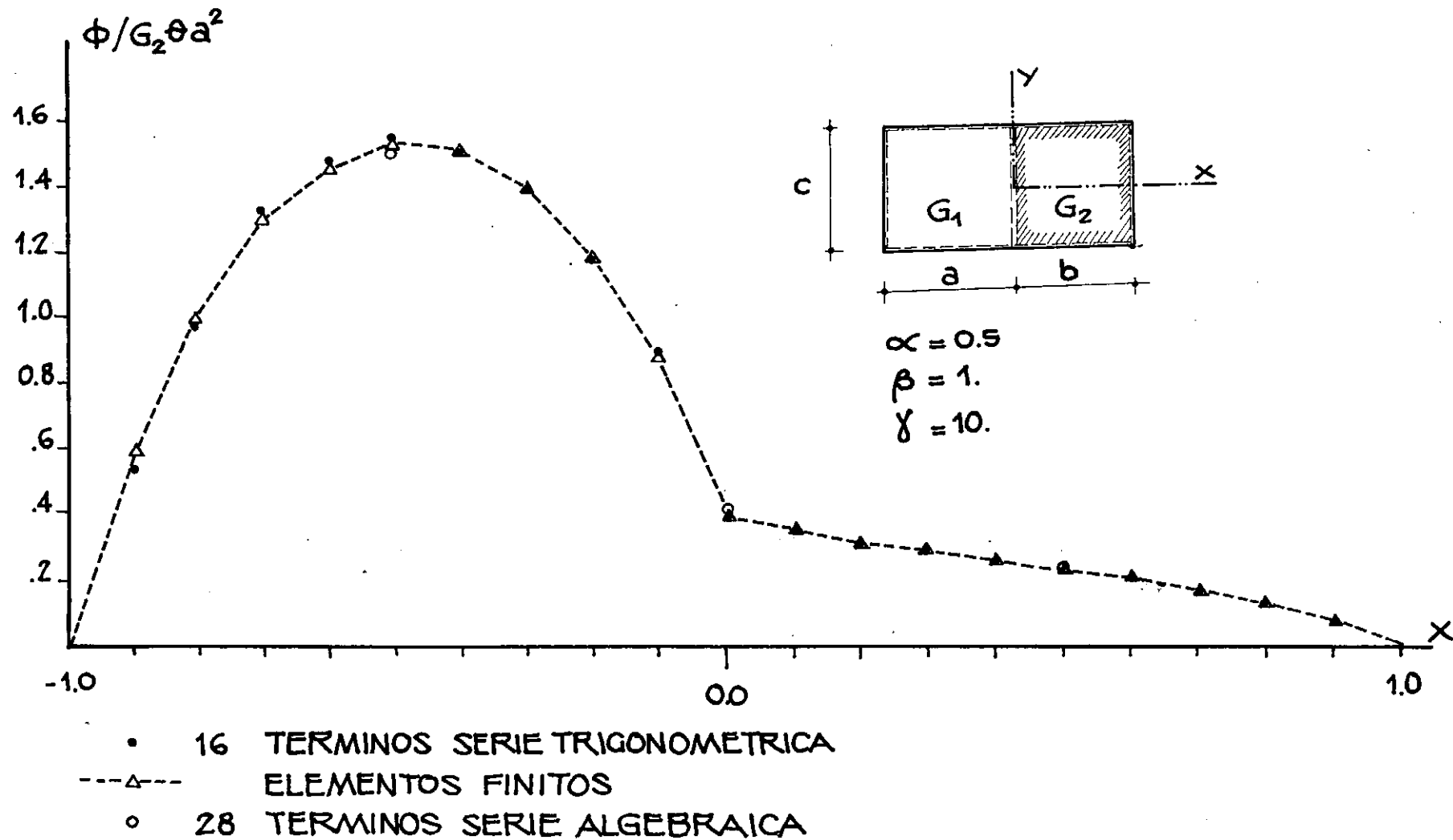


FIGURA 5.10

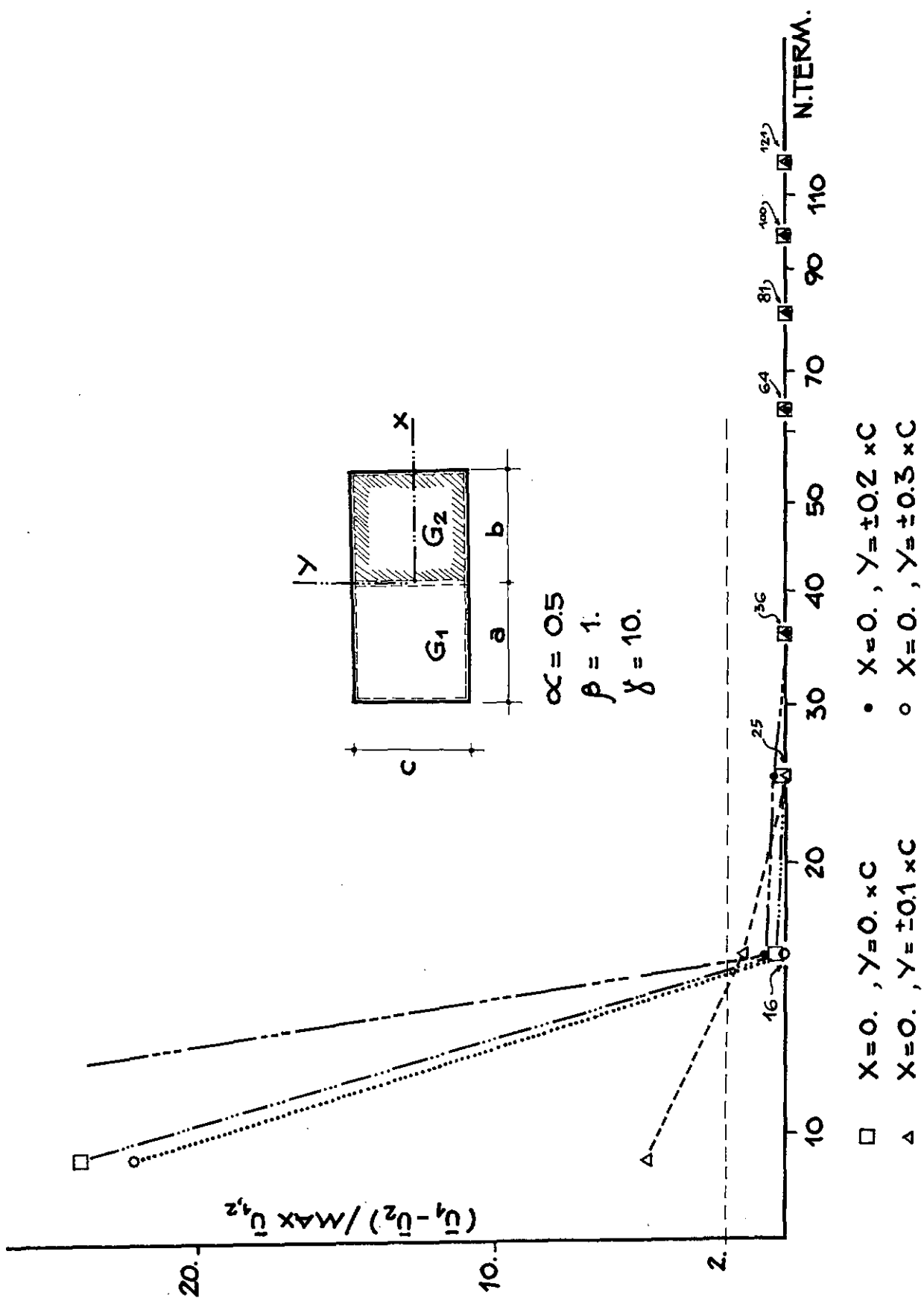
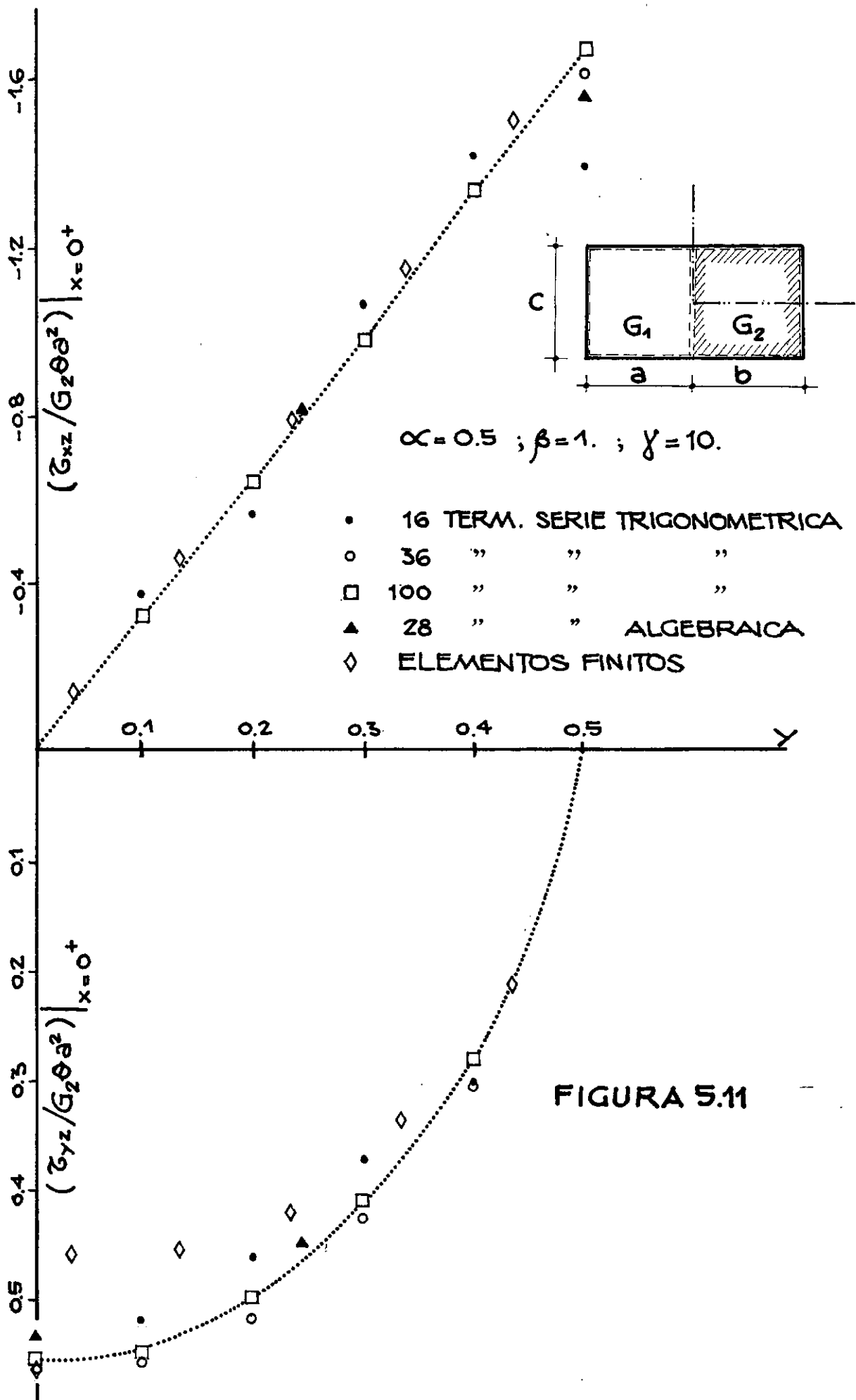


FIGURA 5.12





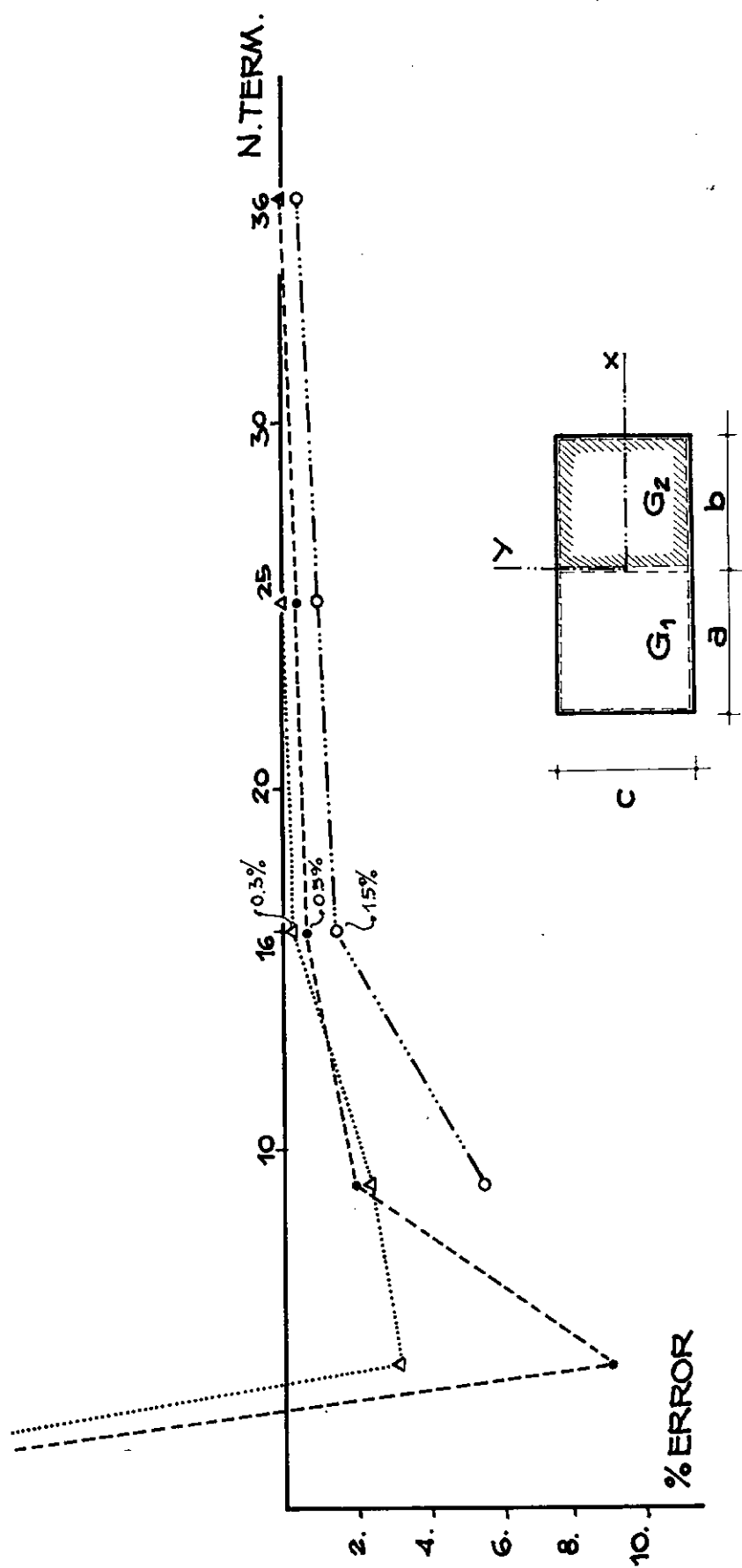


FIGURA 5.13

## CONCLUSIONES

El Método de Ritz aplicado a "funcionales relajados" provee una excelente aproximación en problemas bidimensionales. La discontinuidad en la primera derivada de la superficie extremal, es claramente mostrada por la representación-Ritz.-

En la mayoría de los casos planteados con pocos elementos del conjunto de funciones coordenadas la solución "exacta" es alcanzada.-

La introducción del mapeamiento de la región  $R$  donde está aplicado el "funcional relajado" permite aplicar el Método de Ritz con gran generalidad, ya que dentro de un mismo problema se pueden abordar diferentes condiciones y formas de contornos.-

Desde que la matriz es simétrica y bandeda y desde que la misma puede construirse con lo que cada "región finita" contribuye en (5.1.13) es posible preparar programas para análisis por medio del Método de Ritz muy similares a los existentes para "Elementos Finitos", con algunas ventajas sobre estos últimos:

- i) El número de ecuaciones es independiente del número de nudos existentes en la representación aproximada  $\bar{R}$  de  $R$  .-
- ii) En problemas en que la función extremal sea continua en  $R$  es posible resolver el problema con una única región finita  $\bar{R}$  en  $R$  , lo que es imposible en el análisis por elementos finitos.-
- iii) Dentro de una misma representación aproximada  $\bar{R}$  de  $R$  es posible alcanzar la solución con solo aumentar el número de elementos , del sistema de funciones coordenadas, a tener en cuenta en el cálculo. En el análisis por medio de "elementos finitos" si se de--

sea mejorar la solución será necesario construir una nueva representación  $\bar{R}$  de  $R$ , que como ya se sabe es la parte más tediosa en el análisis por este método.-

iv) Lo anterior significa en el caso del Método de Ritz el cálculo solo de los nuevos coeficientes de la matriz-Ritz que afectan a las nuevas incógnitas (esto es los nuevos coeficientes-Ritz), para el caso de Elementos Finitos significa el cálculo de toda la matriz del sistema de ecuaciones (se entiende que en la nueva representación de  $R$  se han modificado las dimensiones de todos los "elementos").-

Ahora bien, todo esto no tiene por objeto decir cual método es mejor que otro, por cuanto en ningún momento se pone en tela de juicio la utilidad que dio y está dando el Método de Elementos Finitos en diferentes campos de la ciencia, pero sí tiene por objeto mostrar que el Método de Ritz bajo la forma presentada en este trabajo puede aplicarse con la misma generalidad que el Método de Elementos Finitos.-

Por otra parte las conclusiones a que se arribaron para el Método de Ritz son en un todo aplicables a otros métodos directos, como por ejemplo el Método de Galerkin, a la vez que el análisis funcional en lo que respecta a la teoría de los operadores en espacios de Hilbert permite dar una idea del error cometido en la solución aproximada.-

Por último, la investigación bajo las líneas de este trabajo de la aplicación del Método de Ritz y de Galerkin en el análisis de cáscaras, problemas dinámicos y no lineales queda abierta.-

# A N E X O A. FUNCIONALES QUE DEPENDEN DE DERIVADAS

## DE ORDEN SUPERIOR

Sea determinar la función  $y=y(x) \in C^2_S[a,b]$  que cumpliendo con las condiciones de contorno  $y(a)=y_a$ ,  $y(b)=y_b$ ,  $y'(a)=y'_a$ ,  $y'(b)=y'_b$  minimice el funcional

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x), y''(x)) dx \quad (1)$$

Luego se puede definir el siguiente espacio de funciones admisibles

$$\sum_S = \left\{ y; y \in C^2_S[a,b], y(a)=y_a, y(b)=y_b, y'(a)=y'_a, y'(b)=y'_b \right\} \quad (2)$$

y el espacio lineal de variaciones admisibles

$$H_S = \left\{ h; h \in C^2_{SP}[a,b], h(a)=0, h(b)=0, h'(a)=0, h'(b)=0 \right\} \quad (3)$$

donde

$$\|h\| = \max_{[a,b]} |h(x)| + \max_{[a,b]} |h'(x)| + \sup_{[a,b]} |h''(x)|$$

y tal que  $\|h\| < \delta$  para algún  $\delta > 0$ .

Si  $f \in C^2(\mathcal{R})$  donde  $\mathcal{R}$  es el espacio  $(x, y, y', y'')$  que contiene todos los elementos lineales  $(x_0, y_0(x_0), y'_0(x_0), y''_0(x_0))$  incluso los elementos  $(x_k, y_0(x_k), y'_0(x_k), y''_0(x_k^{\pm}))$  donde  $x_k \in P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  conjunto finito de puntos donde  $y''$  es discontinua, luego la primera variación existe y estará dada por:

$$\delta F(h) = \left. \frac{d}{dt} F(y_0 + th) \right|_{t=0} = \int_a^b (f_y h + f_{y'} h' + f_{y''} h'') dx \quad (4)$$

La condición necesaria para que en  $y=y_0(x)$   $F(y)$  alcance un mini-

mo relativo débil es que

$$\delta F(h) = \int_a^b (f_{y'} h + f_{y', h'} + f_{y'', h''}) dx = 0 \quad (5)$$

Si

$$\int_a^x f_y(t, y(t), y'(t), y''(t)) dt = K(x) \quad (6)$$

donde  $K(x) \in C_{SP}^2[a, b]$ ; integrando por parte el primer término de (4) :

$$\int_a^b f_y h dx = h K(x) \Big|_a^b - \int_a^b K(x) h' dx \quad (7)$$

$$\text{desde que } h \in H_S, \text{ resulta } h K(x) \Big|_a^b = 0 \quad (8)$$

de (4), (7) y (8):

$$\int_a^b [(f_{y'} - K(x))h' + f_{y'', h''}] dx = 0 \quad (9)$$

Si

$$\int_a^x (f_{y'} - K(x)) dx = Q(x) \quad (10)$$

donde  $Q(x) \in C_{SP}^2[a, b]$ ; luego se podrá integrar por parte la (9) y recordando que  $h \in H_S$ , esto es  $h'(a)=h'(b)=0$  se tiene:

$$\int_a^b h'' (f_{y'',} - Q(x)) dx = 0 \quad (11)$$

Por el lema generalizado de Dubois-Raymond<sup>(2,3,8)</sup> se tiene que

$$f_{y'',} - Q(x) = C + C_1 x \quad (12)$$

Recordando la definición de  $K(x)$  y  $Q(x)$

$$f_{y'',} = \int_a^x \left[ f_{y''}(t, y(t), y'(t), y''(t)) - \int_a^x f_{y''}(1, y(1), y'(1), y''(1)) d1 \right] dt + C + C_1 x \quad (13)$$

La ecuación (12) es la ecuación de Euler-Lagrange en forma integral y

deberá verificarse en todo  $x \in [a, b]$  por  $y = y_0(x)$  excepto para  $x \in P$ . Por otra parte de (13) se sigue que en todo intervalo donde  $y_0$  tenga derivada de segundo orden continua (recuérdese que  $Q(x) \in C_{SP}^2[a, b]$ ) deberá verificarse

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} = 0 \quad (14)$$

que es la ecuación (diferencial) de Euler-Lagrange.-

De (12) dado que  $Q(x) \in C_{SP}^2[a, b]$  se tiene que, para  $x_k \in P = (x_1, \dots, x_n)$ ,

$$f_{y''} \Big|_{x=x_k^-} = f_{y''} \Big|_{x=x_k^+} \quad (15)$$

La (15) es la condición de Weierstrass-Erdmann que debe verificarse, por  $y = y(x)$ , en todo  $x \in P$  para la existencia de extremales con "puntos angulosos".-

También de (12) se sigue que

$$\frac{d^2}{dx^2} Q(x) = \frac{d^2}{dx^2} f_{y''}$$

y como  $Q(x) \in C_{SP}^2[a, b]$  resulta  $\frac{d^2}{dx^2} f_{y''} \in C_{SP}[a, b]$  y dado que

$$\frac{d^2}{dx^2} f_{y''} = \dots + f_{y''} y^{1v}$$

y si  $f_{y''} y^{1v} \neq 0$  es  $y^{1v} \in C_S[a, b]$ . Luego si  $y = y_0(x) \in C_S^2[a, b]$  minimiza  $F(y)$  resulta también  $y = y_0(x) \in C_S^4[a, b]$ , es decir que estableciendo condiciones menos severas sobre el campo de funciones admisibles, las funciones extremales cumplen también las condiciones establecidas en §1. 13, esto es  $y \in C^4[a, b]$  o  $C_S^4[a, b]$ .-

## A N E X O B. MINIMO DE UN FUNCIONAL CUADRATICO <sup>†</sup>

### 1. CONSIDERACIONES GENERALES

Se vio en el Capítulo I que si en un espacio lineal se define una "norma" se tiene lo que se convino en llamar "espacio lineal normado" (e.l.n.). Con el concepto de norma se podrá definir el concepto de "convergencia".-

Se dirá entonces que si en un e.l.n.  $X$  la secuencia de elementos  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , que se escribirá  $\{x_n\}$  tiene la propiedad:

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\| = 0 \quad (1)$$

o lo que es lo mismo si dado un  $\varepsilon > 0$  existe un entero  $N = N(\varepsilon)$  tal que para  $n > N$  y  $m > 0$  se verifica:

$$\|x_{n+m} - x_n\| < \varepsilon \quad (2)$$

se dice que  $\{x_n\}$  satisface la propiedad de Bolzano-Cauchy. La secuencia  $\{x_n\}$  suele llamarse en ese caso "secuencia Cauchy".-

A su vez se dice que  $\{x_n\}$  converge ( o que converge en la norma) al elemento  $x \in X$ , y se escribirá  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , si se verifica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

---

<sup>†</sup> Este Anexo está basado en las obras de S. G. Mikhlin:

- i) "Mathematical Physics an Advanced Course"<sup>(1)</sup>
- ii) "The Numerical Performance of Variational Methods"<sup>(14)</sup>
- iii) "Variational Principles in Mathematical Physics"<sup>(15)</sup>

Claramente se ve que si  $\{x_n\}$  converge a  $x$ ,  $\{x_n\}$  es una secuencia Cauchy sin embargo la inversa puede ser falsa, es decir si  $\{x_n\}$  satisface el criterio de Bolzano-Cauchy puede ser posible que no exista un elemento  $x$ ,  $x \in X$ , al cual la secuencia  $\{x_n\}$  converja a medida que  $n$  crece.-

El espacio  $X$  se dice "completo" si para toda secuencia  $\{x_n\}$  que satisface el criterio de Bolzano-Cauchy existe un elemento  $x \in X$ , al cual  $\{x_n\}$  converge a medida que  $n$  tiende a infinito.-

Si el e.l.n. no es completo siempre será posible agregar nuevos, de manera que el nuevo e.l.n. sea completo, esto se conoce como "completamiento del espacio".-

Un espacio lineal normado completo es llamado "espacio Banach". Un ejemplo de espacio Banach, utilizado durante este trabajo, es el espacio  $L_2(\Omega)$ , donde  $\Omega$  es un espacio dimensionalmente finito definido por el dominio de variación de las variables independientes ligadas a  $L_2$  y  $L_2(\Omega)$  es el conjunto de todas las funciones cuadrado integrable en  $\Omega$ . La norma en  $L_2$  es

$$\|x\| = \left( \int_{\Omega} x^2 d\Omega \right)^{1/2}$$

convergencia de elementos significa aquí convergencia en la "media", (desviación cuadrática media).-

Sea  $B_1$  y  $B_2$  dos espacios Banach y sea  $D$  un subespacio arbitrario de  $B_1$ . Sea  $A$  un "operador" que aplica  $D$  en  $B_2$ . El "dominio" del operador  $A$  es luego el subespacio  $D$ , se lo designará por  $D(A)$ , y el rango de  $A$ ,  $R(A)$ , es el conjunto de todos los elementos de  $B_2$  de la forma

$$Ax, \text{ donde } x \in D \text{ y } Ax \in B_2$$



El operador  $A$  es aditivo si:

$$A(x + y) = Ax + Ay$$

y es homogéneo si

$$A(\lambda x) = \lambda Ax$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $x, y \in D$ . Si  $A$  es aditivo y homogéneo se dice que es un operador lineal, de lo contrario se dice no lineal.-

Un operador  $A$  es "limitado" si existe un número  $M > 0$ ,  $M \in \mathbb{R}$  tal que

$$Ax \leq M \|x\|$$

donde con  $\| \cdot \|$  se indica tanto la norma en  $B_1$  como en  $B_2$ .-

La suma de dos operadores  $A_1$  y  $A_2$  se define por:

$$(A_1 + A_2)x = A_1x + A_2x$$

igualmente la multiplicación de un operador por un escalar está dada

$$(\lambda A)x = \lambda(Ax)$$

Un operador  $F$  es llamado Funcional si el rango de  $F$  es el conjunto de todos los números reales. Un funcional es lineal si

$$F(a) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$y \quad F(a + b) = F(a) + F(b)$$

Sea ahora un espacio lineal en el cual se ha definido el "producto escalar". Por "producto escalar" se entenderá el operador que asigna a cada par de elementos  $x_1, x_2$  del espacio lineal un número real no negativo, se lo designará por  $(x_1, x_2)$  y que satisface las siguientes propiedades:

- i)  $(x_1, x_1) \geq 0$ , donde la igualdad es válida si  $x_1 = 0$  (elemento nulo)
- ii)  $(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$
- iii)  $(x_1 + x_2, x_3) = (x_1, x_3) + (x_2, x_3)$

El "producto escalar" permite introducir el concepto de ortogonalidad  $x_1$  es ortogonal a  $x_2$  si  $(x_1, x_2) = 0$ , se ve claramente que se podrá adoptar como norma a la siguiente expresión:

$$\|x\| = ((x_1, x_1))^{1/2}$$

Se sigue de esto que en un espacio lineal definido el producto escalar se tiene un e.l.n.. Por otro lado un espacio Banach de dimensión infinita en el cual se ha definido el "producto escalar" y que es completo respecto a la norma  $\|x\| = ((x_1, x_1))^{1/2}$  es llamado "espacio-Hilbert".-

## 2.FUNCIONALES CUADRATICOS

Se considerará aquí funcionales cuyo dominio de definición es un espacio Hilbert.-

Sea  $H$  un espacio de Hilbert. En  $H$  se dice que  $\Phi(u, v)$  es un funcional bilineal si cumple con las siguientes propiedades:

- i) para un elemento  $v$  fijo es un funcional lineal de  $u$ :

$$\Phi(a_1 u_1 + a_2 u_2, v) = a_1 \Phi(u_1, v) + a_2 \Phi(u_2, v) \quad (3)$$

- ii) para un elemento  $u$  fijo es un funcional lineal de  $v$ :

$$\Phi(u, a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 \Phi(u, v_1) + a_2 \Phi(u, v_2) \quad (4)$$

$(a_i \in \mathbb{R})$

Un funcional bilineal es simétrico si:

$$\bar{\Phi}(u,v) = \bar{\Phi}(v,u) \quad (5)$$

Un ejemplo simple de lo anterior es el producto escalar  $(u,v)$ .-

Si  $\bar{\Phi}(u,v)$  es un funcional bilineal simétrico, se convendrá en llamar a la expresión  $\bar{\Phi}(u,u)$  "funcional cuadrático homogéneo" o " forma cuadrática". Todo forma cuadrática satisface la siguiente expresión:

$$\bar{\Phi}(u+v, u+v) = \bar{\Phi}(u,u) + 2\bar{\Phi}(u,v) + \bar{\Phi}(v,v) \quad (6)$$

En efecto si  $\bar{\Phi}$  es bilineal luego

$$\bar{\Phi}(u+v, u+v) = \bar{\Phi}(u,u) + \bar{\Phi}(u,v) + \bar{\Phi}(v,u) + \bar{\Phi}(v,v)$$

y si a su vez es simétrico (luego es una forma cuadrática)

$$\bar{\Phi}(u+v, u+v) = \bar{\Phi}(u,u) + 2\bar{\Phi}(u,v) + \bar{\Phi}(v,v)$$

con lo que se demuestra (6).-

Ejemplo 1. Un ejemplo de lo anterior relacionado con el presente trabajo es la integral de Dirichlet:

$$\bar{\Phi}(u,u) = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega$$

Como se ve es una forma cuadrática que corresponde al funcional bilineal simétrico:

$$\bar{\Phi}(u,v) = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} d\Omega$$

Ahora bien la expresión

$$F(u) = \bar{\Phi}(u,u) - l(u)$$

se llamará "funcional cuadrático", donde  $\Phi(u,u)$  es una forma cuadrática y  $l(u)$  un funcional lineal. Un ejemplo de esto es el funcional cuadrático

$$F(u) = \int_{\Omega} \left[ \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 - 2 f(x) u \right] d\Omega$$

donde con  $x$  se indica  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .-

### 3. OPERADORES POSITIVOS DEFINIDOS

Sea  $A$  un operador actuando en el espacio  $H$ , se entenderá por esto que  $D(A) \subset H$ ,  $R(A) \subset H$ . Se supondrá que  $A$  es un operador lineal (positivo, homogéneo pero posiblemente no limitado) tal que su dominio de definición sea denso esto es  $D(A) = H$ .-

Un operador  $A$  actuando en  $H$  se dice "simétrico" si  $D(A) = H$  y si para cualquier  $u, v \in D(A)$  se cumple la siguiente relación

$$(Au, v) = (u, Av) \quad (7)$$

Si  $A$  es un operador simétrico, luego para  $u, v \in D(A)$ ,  $(Au, v)$  es un funcional simétrico bilineal y  $(Au, u)$  es una forma cuadrática.-

Ejemplo 1. En el espacio  $H = L_2(0,1)$  considérese el operador

$$A = - \frac{d^2(\cdot)}{dx^2} \quad (8)$$

sea  $D(A)$  el conjunto de funciones  $u \in H$  que satisfacen

$$u \in C^2[0,1] \quad , \quad u(0)=u(1)=0 \quad (9)$$

Obviamente  $A$  es lineal, se mostrará que es simétrico; para ello hágase el producto escalar  $(Au, v)$  donde  $u, v \in C^2[0,1]$  y

$$u(0)=u(1)=0, \quad v(0)=v(1)=0 \quad (10)$$

Integrando por parte y teniendo en cuenta que los términos ya integrados resultan nulos por (9) y (10) se tiene que

$$\begin{aligned} (Au, v) &= - \int_0^1 u'' v \, dx = \int_0^1 u' v' \, dx = - \int_0^1 u v'' \, dx = \\ &= (u, Av) \end{aligned} \quad (11)$$

Obsérvese que la propiedad de un operador de ser simétrico está íntimamente relacionado con las condiciones de contorno.-

DEFINICION 1. Un operador simétrico A se dice "positivo" si la forma cuadrática  $(Au, u)$  verifica que:

$$(Au, u) \geq 0, \quad (Au, u) = 0 \text{ si y solo si } u=0 \text{ (elemento nulo)} \quad (12)$$

Así en el ejemplo 1, el operador (8)-(9) es positivo. Para ello recuérdese (11) donde se ve que:

$$(Au, u) = - \int_0^1 u'' u \, dx = \int_0^1 u'^2 \, dx \geq 0$$

de donde si  $(Au, u) = 0$  se sigue que  $u'=0$ , luego  $u=\text{cte.}$  y de (9) resulta  $u \equiv 0$ , por lo que (12) se verifica.-

DEFINICION 2. Un operador simétrico A se dice "positivo definido" si

$$\inf_{\substack{u \in D(A) \\ u \neq 0}} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2} > 0 \quad (13)$$

o lo que es similar si existe una constante  $\gamma^2 > 0$ , tal que

$$(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2 \quad (14)$$

Resulta obvio que todo operador positivo definido es a la vez un operador positivo.-

#### 4. ESPACIO ENERGIA

Con todo operador positivo definido se puede asociar un nuevo espacio Hilbert que se convendrá en llamar "espacio energía".-

Sea  $H$  el espacio de Hilbert y  $A$  un operador positivo definido en  $H$ . Se construye el nuevo espacio Hilbert como sigue:

Los elementos del nuevo espacio incluyen todos los elementos de  $D(A)$ , y en él se define el nuevo producto escalar

$$(u, v)_A = (Au, v) ; u, v \in D(A) \quad (15)$$

La demostración de que (15) satisface las propiedades enumeradas en 1. GENERALIDADES puede verse en S. G. Mikhlin<sup>(1)</sup>.-

Tomando  $(u, v)_A$  como un producto escalar se transforma el conjunto  $D(A)$  en un espacio Hilbert, este espacio puede resultar incompleto en ese caso siempre es posible completarlo. Este espacio ya completo, se llamará "espacio energía" y se denotará por  $H_A$ .-

El nuevo producto escalar genera una nueva norma, que se designará con el símbolo  $||| \cdot |||_A$  :

$$|||u|||_A^2 = (u, v)_A \quad (16)$$

luego si  $u \in D(A)$

$$|||u|||_A^2 = (Au, u)$$

y de (14) se sigue

$$||u|| \leq \frac{1}{\gamma} |||u|||_A \quad (17)$$

Las cantidades  $(u, v)_A$  y  $|||u|||_A$  se llamarán "producto escalar en la energía" de los elementos  $u, v$  y "norma en la energía" del elemento  $u$ . En

las ocasiones donde no sea posible confusión alguna se eliminará el subscrito A por lo que se escribirá  $(u,v)$  y  $\|u\|$  respectivamente.-

En el espacio energía  $H_A$  se distinguen por tanto dos elementos : los elementos "viejos" (los pertenecientes a  $D(A)$ ) y los elementos "nuevos" o ideales que provienen del completamiento del espacio. Desde que  $H_A$  es completo se sigue que si  $u$  es un elemento ideal existe una secuencia  $\{u_n\}$  de elementos viejos tal que:

$$\|u - u_n\| \rightarrow 0 \quad \text{para } n \rightarrow \infty \quad (18)$$

Obviamente si  $u$  es un elemento viejo resultará:

$$\|u_{n+m} - u_n\| \rightarrow 0 \quad \text{para } n \rightarrow \infty \text{ y } m > 0 \quad (19)$$

Es necesario destacar también que si  $A$  es un operador positivo , definido, todo elemento del espacio energía  $H_A$  puede identificarse con algún elemento del espacio original  $H$ . Esto significa

- i) un y solo un elemento  $u' \in H$  corresponde a un elemento  $u \in H_A$
- ii) si  $u', v' \in H$  estan en correspondencia con  $u, v \in H_A$  luego el elemento  $a_1 u' + a_2 v' \in H$  está en correspondencia con la combinación lineal  $a_1 u + a_2 v \in H_A$
- iii) distintos elementos de  $H$  corresponden a distintos elementos en  $H_A$

Lo anterior es lo que se conoce en la literatura como correspondencia isomorfica lineal (vease S. G. Mikhlin<sup>(1)</sup> pag. 93)

## 5. MINIMO DE UN FUNCIONAL CUADRATICO

Sea  $A$  un operador positivo definido en  $H$ ,  $f$  un elemento en  $H$ . El funcional cuadrático

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f) \quad (20)$$

tiene como dominio el mismo dominio de definición del operador  $A$ , esto es  $D(F) = D(A)$ . El funcional (20) recibe el nombre de "funcional energía" para el operador  $A$ .-

TEOREMA 5.1. Para que un elemento  $u_0 \in D(A)$  minimice al funcional energía es necesario y suficiente que  $u_0$  satisfaga la ecuación

$$A u_0 = f \quad (21)$$

además este elemento es único.-

De que es condición necesaria resulta de lo siguiente:

$$\begin{aligned} \delta F(h) &= \left. \frac{d}{dt} F(u+th) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} [(A(u+th), u+th) - 2(u+th, f)] \right|_{t=0} = \\ &= \left. \frac{d}{dt} [(Au, u) + 2t(Au, h) + t^2(Ah, h) - 2(u, f) - 2t(h, f)] \right|_{t=0} = \\ &= \left. \frac{d}{dt} [F(u) + 2t(Au-f, h) + t^2(Ah, h)] \right|_{t=0} = \\ &= 2(Au-f, h) \end{aligned}$$

Para que  $u_0$  minimice  $F$  se tiene que:

$$\delta F(h) = 2(Au_0-f, h) = 0$$

y dado que  $h$  es arbitrario resulta

$$Au_0 - f = 0$$



que es lo que se quería demostrar.-

De que es condición suficiente surge de:

Sea  $u_0$  tal que (21) se verifica, se puede tomar un elemento arbitrario de la forma  $u = u_0 + h$  luego:

$$\begin{aligned} F(u) &= (A u_0 + h, u_0 + h) - 2(u_0 + h, f) = \\ &= (A u_0, u_0) + 2(A u_0, h) + (A h, h) - 2(u_0, f) - 2(h, f) \end{aligned}$$

y recordando que (21) se verifica

$$F(u) = F(u_0) + (A h, h)$$

y como  $A$  es un operador positivo definido resulta para  $h \neq 0$   $(A h, h) > 0$  luego

$$F(u) > F(u_0)$$

Falta ahora solo probar que es único. Sea  $u_1$  otro elemento para el que  $F$  alcanza otro mínimo. De lo anterior se tiene

$$F(u_1) > F(u_0)$$

pero de la misma manera se puede llegar a plantear

$$F(u_0) > F(u_1)$$

luego se llega a una contradicción y esta proviene de suponer que  $u_1 \neq u_0$ , luego  $u_1 = u_0$ .-

Nótese que aquí se ha establecido la equivalencia entre los dos problemas siguientes: resolver la ecuación  $Au = f$  y la de determinar el mínimo del funcional energía para el operador  $A$  es decir

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f)$$

Cuando en uno de estos dos problemas la solución es hallada, luego el

otro tiene solución ( compárese esto con lo planteado en §2.1), sin embargo no se sigue de ésto que los problemas tengan siempre solución de hecho ésta puede no existir (vease S. G. Mikhlin<sup>(1)</sup> pag. 102).-

## 6. SOLUCION GENERALIZADA.

En (20) el funcional  $F(u)$  está definido en el conjunto  $D(A)$ . sin embargo es fácil extender la definición de  $F$  en todo el espacio energía  $H_A$ . Para ello en (20) bastará recordar que  $(Au, u) = |||u|||_A^2$ , luego

$$F(u) = |||u|||_A^2 - 2(u, f) \quad (22)$$

En (22) el primer término del segundo miembro está definido para elementos  $u \in H_A$ , el segundo para  $u \in H$  y dada la correspondencia establecida en 4. ESPACIO ENERGIA también está definido para  $u \in H_A$ . Luego la (22) conduce a la definición de  $F$  en  $H_A$ .-

TEOREMA 6.1. En el espacio energía existe un y solo un elemento para el cual el funcional energía alcanza un mínimo. La demostración de este teorema está basada en el teorema de Riesz que establece lo siguiente: Sea  $l$  un funcional bilineal limitado en un cierto espacio Hilbert  $B$ , se supone que está definido en todo  $B$ , luego existe un y solo un elemento  $u_0$  en  $B$  tal que

$$l u = (u, u_0)_B \quad (23)$$

con  $( , )_B$  se indica el producto escalar en  $B$ .-

Ahora bien la desigualdad de Schwartz-Bunyakovskii establece:

$$|(u, f)| \leq \|u\| \|f\|$$

y recordando la relación entre la "vieja" y "nueva" norma, (17),

$$\left| (u, f) \right| \leq \frac{\|f\|}{\gamma} \|u\| = c \|u\| \quad (24)$$

luego el funcional  $(u, f)$  está limitado en  $H_A$ . Por el teorema de Riesz existe un y solo un elemento  $u_0 \in H_A$  tal que

$$(u, f) = (u, u_0)_A, \quad u \in H_A \quad (25)$$

Reemplazando (25) en (22)

$$F(u) = \|u\|^2 - 2 (u, u_0)_A = (u, u)_A - 2 (u, u_0)_A + (u_0, u_0)_A -$$

$$- (u_0, u_0)_A = (u - u_0, u - u_0)_A - (u_0, u_0)_A; \quad u \in H_A$$

o simplemente

$$F(u) = \|u - u_0\|^2 - \|u_0\|^2 \quad (26)$$

Resulta obvio de (26) que  $F$  definido en  $H_A$  alcanza el mínimo para el elemento  $u = u_0$  y solo para ese elemento siendo en ese caso

$$\min F(u) = - \|u_0\|^2 \quad (27)$$

Con lo que se demuestra el TEOREMA 6.1

El elemento  $u_0 \in H_A$  que minimiza (22) es llamado "solución generalizada" de la ecuación

$$Au = f \quad (28)$$

Si se tiene que  $u_0$  también pertenece a  $D(A)$  por el TEOREMA 5.1 es la solución ordinaria de la ecuación anterior.-

Si el espacio energía  $H_A$  es separable, esto es existe por lo menos un conjunto  $\{w_n\}$  completo y ortonormal en él:

$$(w_j, w_k)_A = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases} \quad j, k = 1, 2, \dots \quad (29)$$

es posible indicar un camino simple para construir la solución generalizada de la ecuación (28).-

Sea  $u_0$  la solución generalizada de la ecuación (28), desde que  $\{w_n\}$  existe se puede expresar mediante un desarrollo en serie de Fourier

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k \quad (30)$$

donde  $a_k$ , coeficiente de la serie de Fourier, está dado por

$$a_k = (u_0, w_k)_A \quad (31)$$

recordando (25) donde se reemplaza  $u$  por  $w_k$  la (31) puede escribirse:

$$a_k = (f, w_k) \quad (32)$$

Luego

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, w_k) w_k \quad (33)$$

Ahora bien sea

$$u_n = \sum_{k=1}^n b_k w_k \quad (34)$$

donde los coeficientes  $b_k$  se calculan como sigue:

Reemplácese (34) en (28) y hágase el producto escalar de ambos miembros con  $w_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ), luego el sistema de ecuaciones puede escribirse en forma resumida:

$$(w_k, Au_n) = (w_k, f) \quad k=1, 2, \dots, n \quad (35)$$

Si se designa con  $G_n$  la siguiente matriz-Gram (observese que no es otra cosa que la matriz-Ritz cuando se toman como funciones coordinadas a  $\{w_n\}$ ):

$$G_n = \begin{bmatrix} (w_1, w_1)_A & (w_1, w_2)_A & \dots & (w_1, w_n)_A \\ (w_2, w_1)_A & (w_2, w_2)_A & \dots & (w_2, w_n)_A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_n, w_1)_A & (w_n, w_2)_A & \dots & (w_n, w_n)_A \end{bmatrix} \quad (36)$$

luego la (35) toma la forma:

$$G_n(b_1, b_2, \dots, b_n)^t = ((f, w_1), (f, w_2), \dots, (f, w_n))^t \quad (37)$$

Desde que  $\{w_n\}$  es ortonormal en  $H_A$  resulta  $G_n = [I]_n$  (donde con  $[I]_n$  se representa la matriz unidad de orden  $n \times n$ ) luego

$$b_k = (f, w_k) \quad k=1, 2, \dots, n.-$$

de donde

$$u_n = \sum_{k=1}^n (f, w_k) w_k \quad (38)$$

Desde que las propiedades de la matriz-Gram siguen siendo las mismas para  $n \rightarrow \infty$  de (33) y (38) se sigue que

$$\|u_0 - u_n\| \rightarrow 0 \quad \text{para } n \rightarrow \infty \quad (39)$$

esto es (38) converge en la norma energía de  $H_A$ , es fácil ver que también converge en la norma del espacio  $H$ , para ello recuérdese (17)

$$\|u_0 - u_n\| \leq \frac{1}{\gamma} \|u_0 - u_n\| \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

Lo presentado en esta última parte está íntimamente relacionado con la cuestión de la separabilidad del espacio energía. Para un análisis mas profundo de este tema vease las obras de S. G. Mikhlin enumeradas al comienzo de este Anexo B.-

## 7. MINIMO DE UN FUNCIONAL CUADRATICO. CASO GENERAL

En 5. se presentó el problema variacional para un funcional de la forma:

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f)$$

donde la parte lineal  $2(u, f)$  está limitada en el espacio original. En 6. se hizo uso de esta propiedad para demostrar la existencia de una solución generalizada del problema variacional. Se considerará ahora el caso de un funcional cuadrático de forma mas general que (20):

$$F(u) = (Au, u) - 2 l(u) \quad (40)$$

donde  $A$  es un operador positivo definido actuando en el espacio Hilbert  $H$ , y  $l$  un funcional lineal pero no necesariamente limitado en este espacio  $H$ , el factor 2 es introducido por conveniencia.-

$F(u)$  está definido en  $H$ , igualmente que en 6. se puede extender (40) en todo  $H_A$ :

$$F(u) = \|u\|^2 - 2 l(u) \quad (41)$$

Dos posibilidades pueden ocurrir:

- i). El funcional  $l$  es no limitado en  $H_A$ , en este caso  $F$  no está limitado inferiormente, luego el problema de determinar el mínimo de (41) no tiene sentido.-
- ii) El funcional  $l$  está limitado, luego por el teorema de Riesz existe un y solo un elemento  $u_0 \in H_A$  tal que

$$l(u) = (u, u_0)_A$$

luego la (41) resulta

$$F(u) = \|u\|^2 - 2 (u, u_0)_A$$

Repitiendo los mismos argumentos de 6.SOLUCION GENERALIZADA, se demuestra que  $u_0$  minimiza (41) y que es único.-

Nuevamente si el espacio  $H_A$  es separable y si  $\{w_n\}$  es un sistema ortonormal y completo en  $H_A$  resulta que

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} l(w_k) w_k$$

## A N E X O C. PROPIEDADES DE LA MEJOR APROXIMACION

### 1. SISTEMAS MINIMOS

Un sistema de elementos se dice "mínimo" en un espacio Hilbert , si la eliminación de uno de ellos hace que el espacio expandido por el nuevo sistema sea un subespacio del espacio expandido por el sistema original.-

Cualquier conjunto de elementos linealmente independientes es mínimo, desde que la eliminación de uno de ellos reduce en uno la dimensión del espacio expandido por el sistema original. Contrariamente un sistema de elementos linealmente dependientes es un sistema "no-mínimo" la eliminación de un elemento que sea combinación lineal de los demás no modifica al espacio expandido por el sistema original.-

### 2. SISTEMAS BIORTONORMALES

El sistema  $\{v_n\} = v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$  de elementos en el espacio Hilbert, es "biortonormal" al sistema  $u_n = u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  si:

$$(u_j, v_k)_H = \delta_{jk} \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}$$

(con H se designa el espacio en que están definidas estas secuencias)

### 3. PROPIEDADES DE LA MEJOR APROXIMACION

$$\text{Sea } \{w_n\} = w_1, w_2, \dots, w_n, \dots \quad (1)$$

un sistema de elementos en un espacio Hilbert H, sea u un elemento de



H, se supone además que H es separable. El problema de la "mejor aproximación" puede formularse como sigue:

"Determínese los coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (para n fijo) tal que

$$\left\| u - \sum_{k=1}^n a_k w_k \right\| = \min. \quad (2)$$

Puede demostrarse que los coeficientes  $a_k$  están definidos por ( vease S. G. Mikhlin, "Variational Principles in Mathematical Physics"):

$$\sum_{k=1}^n (w_k, w_j) a_k = (u, w_j) \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Los coeficientes  $a_k$  no solo dependen de k sino también de n por lo que se designarán por  $a_k^n$ . Es evidente que:

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k^n w_k \quad (4)$$

puede interpretarse como la proyección de u en el subespacio expandido por  $w_1, w_2, \dots, w_n$ . Si se supone que  $w_1, w_2, \dots, w_n$  es linealmente independiente para cualquier n y que  $\{w_n\}$  es completa en H luego (3) tiene siempre solución desde que el determinante de la matriz no es otra cosa que el Gramiano de los vectores linealmente independiente  $w_1, w_2, \dots, w_n$  que es siempre diferente de cero. Siempre por otra parte es posible ortonormalizar  $\{w_n\}$  para dar así el sistema  $\{v_n\}$  que también será completo en H (por ejemplo puede usarse para ello el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt), se tiene entonces que (4) se transforma en

$$u_n = \sum_{k=1}^n b_k^n v_k \quad (5)$$

donde  $b_k^n = (u, v_k)$  (6)

Desde que  $\{v_n\}$  es completo en  $H$  se tiene

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, v_k) v_k \quad (7)$$

lo que significa que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$

TEOREMA 1. Si  $\{w_n\}$  es mínimo luego existe un  $a_k$  tal que

$$a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_k^n \quad (8)$$

TEOREMA 2. Si el sistema que es biortonormal a  $\{w_n\}$  es limitado en  $H$  luego el proceso de límite (8) es uniforme respecto a  $k$ .

La demostración de estos dos teoremas puede verse en Mikhlin S. G.,

"The Numerical Performance of Variational Methods".-

## A N E X O D. NOTACION VARIACIONAL

Con el objeto de simplificar la notación en los CAPITULOS III, IV y V se presenta en este Anexo lo que se conoce por notación Variacional.-

En §1.4 se vio que dado  $F(u)$ ,  $S, u \in \Sigma$  espacio de funciones admisibles, el espacio de "variaciones admisibles" de  $\Sigma$  quedaba definido por  $H \subset S$  tal que para todo  $u \in \Sigma$  y  $h \in H$  resultara  $u+h \in \Sigma$ .-

Claramente el cambio  $h$  en  $u$  puede llamarse "variación de  $u$ " y representarla por

$$\delta u = h \quad (1)$$

Se vio en §1.8 que si  $F(u) = F(x, u, u')$  resulta

$$\delta F(h) = \frac{\partial F}{\partial u} h + \frac{\partial F}{\partial u'} h' \quad (2)$$

si se toma el caso particular  $F(u) = u'$  la (2) conduce a

$$\delta u' = h' \quad (3)$$

de (3) la ecuación (2) podrá colocarse como

$$\delta F(u) = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \quad (4)$$

Para una completa analogía del operador variacional  $\delta$  con el diferencial la (4) puede presentarse bajo la forma:

$$\delta F(u) = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \quad (5)$$

y desde que solo se ha variado  $u$  y  $u'$  permaneciendo  $x$  fijo, resulta que  $x$  no ha "variado" por lo que  $\delta x \equiv 0$ , y de esta manera la analogía

es completa.-

De (1) y (3) se sigue que

$$\frac{d}{dx} \delta u = \frac{dh}{dx} = h' = \delta \frac{du}{dx} \quad (6)$$

Por tanto si  $x$  es una variable independiente ( $\delta x \equiv 0$ ) los operadores  $\delta$  y  $\frac{d}{dx}$  son conmutativos:

$$\frac{d}{dx} \delta u = \delta \frac{du}{dx} \quad (6.a)$$

Similarmente si  $x, y$  son variables independientes ( $\delta x = \delta y \equiv 0$ ) los operadores  $\delta$  y  $\frac{\partial}{\partial x} \circ \frac{\partial}{\partial y}$  son conmutativos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta u = \delta \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \delta u = \delta \frac{\partial u}{\partial y} \quad (7.a)$$

A N E X O E. LIMITE INFERIOR PARA EL COEFICIENTE  
DE RIGIDEZ TORSIONAL

Se vio en §5.1. que resolver:

$$-\nabla(\nabla u) = 2G\theta \quad \text{en } R \quad (1)$$

$$\text{tal que } u(x,y) = 0 \quad \text{en } C \quad (2)$$

equivale a determinar  $u_0(x,y)$  tal que

$$F(u) = \frac{1}{2G} \|u\|^2 - 2(\theta, u) \quad (3)$$

$$\text{sea mínimo para } u_0 \in \{u(x,y); u(x,y)|_C = 0\} \quad (4)$$

Desde que el espacio de Hilbert  $H_A$  en el que está definido  $F(u)$ , es completo existe un conjunto ortonormal  $\{w_n\}$ , si se toma:

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k w_k \quad (5)$$

se sigue que:

$$\|u_n\|^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 \quad (6)$$

Por otro lado si  $u_0$  es la solución y como  $H_A$  es completo y separable se verifica (Anexo B):

$$\|u_0\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \quad (7)$$

De (6) y (7) se sigue que

$$\|u_n\|^2 < \|u_0\|^2 \quad (8)$$

Del Anexo B expresión (32) resulta en este caso:

$$a_k = 2G\theta \int_R w_k \, dR \quad (9)$$

luego

$$a_k^2 = 2G\Theta \int_R a_k w_k dR \quad (10)$$

Reemplazando (10) en (6) y (7) y recordando (5) y (5.1.3) resulta:

$$\|u_n\|^2 = G\Theta M_{tn} \quad (11)$$

y

$$\|u_o\|^2 = G\Theta M_{to} \quad (12)$$

Donde  $M_{tn}$  y  $M_{to}$  son el momento torsor aproximado y exacto respectivamente.-

De (8), (11) y (12) se sigue que

$$M_{tn} < M_{to}$$

y por tanto

$$C_n < C_o \quad (13)$$

donde  $C_n$  y  $C_o$  son la rigidez aproximada y exacta respectivamente, la (13) indica a su vez que los valores de  $C_n$  son un límite inferior del valor exacto  $C_o$ .-

# B I B L I O G R A F I A

- (1) Mikhlin, S. G., "Mathematical Physics an Advanced Course", North Holland, (1970).-
- (2) Gelfand, I., Fomin, S., "Calculus of Variations", Prentice Hall (1963).-
- (3) Sagan, H., "Introduction to the Calculus of Variations", McGraw Hill, (1969).-
- (4) Kreider, D., "An Introduction to Linear Analysis", Addison Pub. (1966).-
- (5) Bevilacqua, L., Feijóo, R., Rojas, L., "A Variational Principle for the Laplace's Operator with Application in the Torsion of Composite Rods", a ser publicada en el Int. J. Solids Structure.-
- (6) Bevilacqua, L., Feijóo, R., Rojas, L., "Torsión en Barras Seccionalmente Homogéneas", Publicación Técnica COPPE Univ. Federal de Río de Janeiro, (1973).-
- (7) Elsgoltz, L., "Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional", Editorial Mir, Moscú, (1969).-
- (8) Akhiezer, N. I., "The Calculus of Variations", Blaisdell Pub. (1962).-
- (9) Kantorovich, L. V., Krylov, V. I., "Approximate Methods of Higer Analysis", P. Noordhoff Ltd., (1958).-
- (10) Courant, R., "Variational Methods for the Solutions of Problems of Equilibrium and Vibrations", Bull. American Mathematical Society, vol. 49, pág. 1-23, (1943).-

- (11) Sokolnikoff, I. S., "Mathematical Theory of Elasticity", McGraw Hill, (1956).-
- (12) Sokolnikoff, I. S., Sokolnikoff, E. S., "Matemática Superior para Ingenieros y Físicos", Ed. Nigar, (1959).-
- (13) Hildebrand, F. B., "Methods of Applied Mathematics", Prentice--Hall of India, (1968).-
- (14) Mikhlin, S. G., "The Numerical Performance of Variational Methods", Noordhoff Pub., (1971).-
- (15) Mikhlin, S. G., "Variational Principles in Mathematical Physics" Pergamon Press, Oxford, (1964).-
- (16) Krylov, V. I., "Approximate Calculation of Integrals", MacMilan (1962).-
- (17) Muskhelishvili, N. I., "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity", P. Noordhoff Ltd., (1963).-
- (18) Fung, Y. C., "Fundations of Solids Mechanics", Prentice Hall , (1965).-
- (19) Timoshenko, S., Goodier, J. N., "Teoría de la Elasticidad", Ediciones Urmo, (1968).-
- (20) Timoshenko, S., "Problemas de Vibraciones en Ingeniería", Compañía Editorial Continental, (1960).-
- (21) Timoshenko, S., Woinowsky-Kreiger, S., "Theory of Plates and Shells", McGraw Hill, (1959).-
- (22) Love, A. E. H., "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", Dover Pub., (1944).-



- (23) Finlayson, B. A., "The Method of Weighted Residuals and Variational Principles", Academic Press, (1972).-
- (24) Arantes e Oliveira, E. R., "Theoretical Foundations of the Finite Elements Method", Int. J. Solids Structures, vol. 4 ,  
pág. 929-952, (1968).-
- (25) Arantes e Oliveira, E. R., "A General Theory of Variational Methods with Applications to Finite Elements", Univ. Técnica de Lisboa Inst. Superior Técnico, (1972).-
- (26) Oden, J. T., "Finite Elements of Nonlinear Continua", McGraw Hill, (1971).-
- (27) Kohn, W., Krumhansl, J. A., Lee, E. H., "Variational Methods for Dispersion Relations and Elastic Properties of Composite Materials", J. Appl. Mech., vol. 39, pág. 327-336, (1972)
- (28) Lee, E. H., "A Survey of Variational Methods for Elastic Wave , Propagation Analysis in Composites with Periodic Structures", in "Dynamic of Composite Materials", E. H. Lee Editor, ASME, (1972).-
- (29) Prager, W., "Variational Principles for Elastic Plates with Relaxed Continuity Requirements", Int. J. Solids Structures, vol. 4, pág. 837-844, (1968).-
- (30) Reissner, E., "On the Derivation of Boundary Conditions for Plate Theory", M.I.T. Jun. 1963.-
- (31) Reid, J. K., "On the Construction and Convergence of a Finite Element Solution of Laplac's Equation", J. Inst. Maths. Applics., vol. 9, pág. 1-13, (1972).-

- (32) Weinstock, R., "Calculus of Variations with Applications to Physics and Engineering", McGraw Hill, (1952).-
- (33) Washizu, K., "Variational Methods in Elasticity and Plasticity" Pergamon Press, (1968).-
- (34) Washizu, K., "Bounds for Solution of Boundary Value Problems in Elasticity", Int. J. of Math. and Physics, vol. 32, pág. 117-128, (1953).-
- (35) Bolza, O., "Lectures on the Calculus of Variations", Dover Pub. (1961).-
- (36) Filonenko, B., "Theory of Elasticity", Peace Pub. Moscow, (1963).
- (37) Faddeev, D. K., Faddeeva, V. N., "Computational Methods of Linear Algebra", W. H. Freeman Company, S. Francisco (1963)
- (38) Zienkiewicz, O. C., "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw Hill, (1971).-
- (39) Tottenham, H., Brebbia, C., Editors, "Finite Elements Techniques", Southampton University Press, (1970).-
- (40) Holand, I., Bell, K., Editors, "Finite Element Methods in Stress Analysis", Tapir Press, (1969).-
- (41) Ergatoudis, I. B., Irons, B. M., Zienkiewicz, O. C., "Curved Isoparametric Quadrilateral Elements for Finite Element Analysis", Int. J. Solids Structures, vol. 4, pág. 31-42 (1968).-